MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

MATEMÁTICA

Módulo 2

Unidades 19 e 20

Unidade 19

<pág. 27>

A trigonometria do triângulo retângulo

Para início de conversa...

(Texto no interior do balão: Estou trabalhando na construção de uma casa de dois andares e não sei como fazer a escada interna... A única coisa que sei é que o pé direito da casa é de 270 cm.)

(Texto no interior dos balões:
Balão 1 – Fique calmo, Bruno! Vou te explicar uma coisa que vai resolver todos os seus problemas!
Balão 2 – Puxa, Luiz, muito obrigado!)

(Texto no interior dos balões:

Balão 1 – Basicamente, o que você precisa saber é que a inclinação mais favorável para escadas internas é de 30º.

Balão 2 – Hum... sei... Que mais?)

(Texto no interior do balão: Mais nada! Isso é suficiente para você começar a se organizar. Depois conversamos! Tchau!)

Verbete

Pé direito
É a altura entre os dois andares.

****

Você conhece alguém que já passou por esse problema? Será que Bruno tem, de fato, a informação de que precisa para solucionar o problema? Saber que a inclinação ideal para uma escada interna é de 30º e que o pé-direito da casa é de 270 cm, é suficiente para calcular o comprimento da escada?

<pág. 28>

Nesta unidade, você aprenderá a utilizar o triângulo retângulo para resolver problemas do cotidiano, trabalhar com as razões trigonométricas no triângulo retângulo e utilizará os teoremas do seno e cosseno em situações diversas.

Objetivos de aprendizagem

.Utilizar as razões trigonométricas para calcular o valor do seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30°, 45° e 60°

.Resolver problemas do cotidiano, envolvendo as razões trigonométricas.

.Utilizar os teoremas do seno e do cosseno, para resolver problemas variados.

<pág. 29>

Seção 1

O Triângulo Retângulo e as Razões Trigonométricas

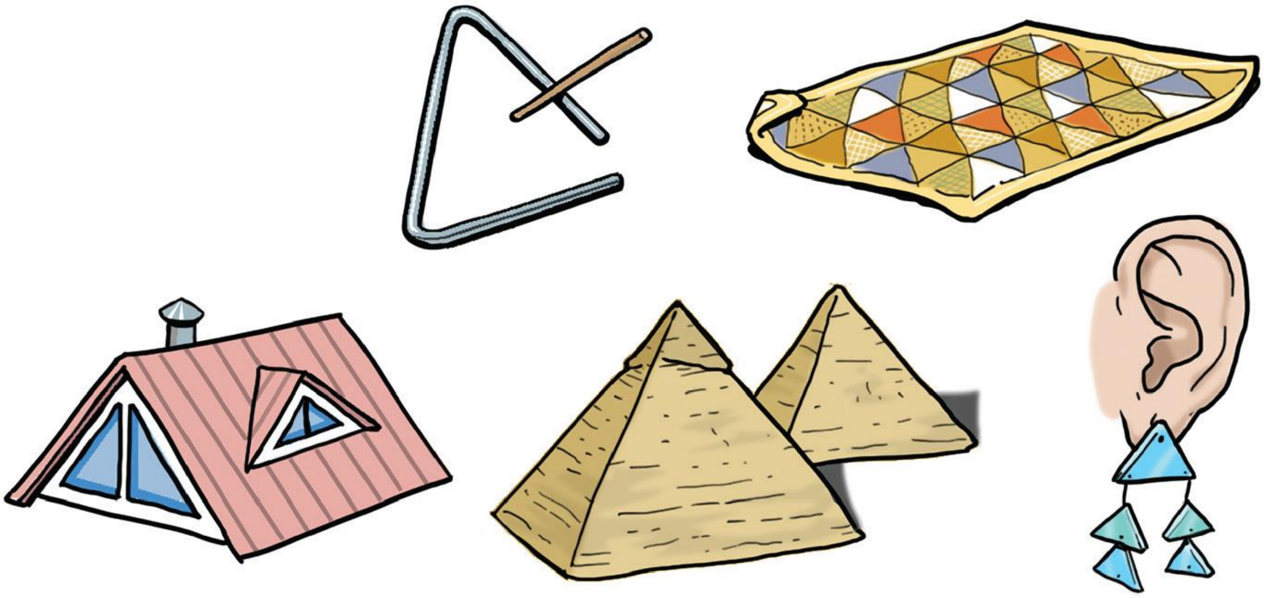


Figura 1: Alguns exemplos do uso de triângulos no nosso dia a dia. Podemos perceber que esta figura geométrica aparece em várias situações desde construções, maquetes a brincos e instrumentos musicais.

Se observarmos o ambiente à nossa volta neste momento, poderemos identificar várias formas

geométricas, dentre elas, o triângulo. Vamos tentar?

Interrompa sua leitura nesse momento. Olhe ao redor. Se quiser, levante-se e dê uma volta pelo lugar onde você está. Quantos triângulos você consegue observar? Você poderia dizer que todos eles têm as mesmas características ou você identifica alguma diferença entre eles? Se quiser, copie a tabela a seguir em seu caderno ou em uma folha à parte, para ajudar em sua investigação.

Atividade

Triângulo	Quantidade observada
Tipo 1	
Tipo 2	

Triângulo	Onde encon-trei?	Caracte-rística
Tipo 1		
Tipo 2		

Agora veja a definição a seguir:

Um triângulo que possui um ângulo de 90º (reto) é chamado de Triângulo Retângulo.

Triângulos retângulos são figuras geométricas muito mais comuns no nosso dia a dia do que imaginamos. Eles estão presentes nas mais diferentes situações. A figura abaixo mostra algumas delas. Será que algum dos objetos mostrados é igual a um dos triângulos que você encontrou?

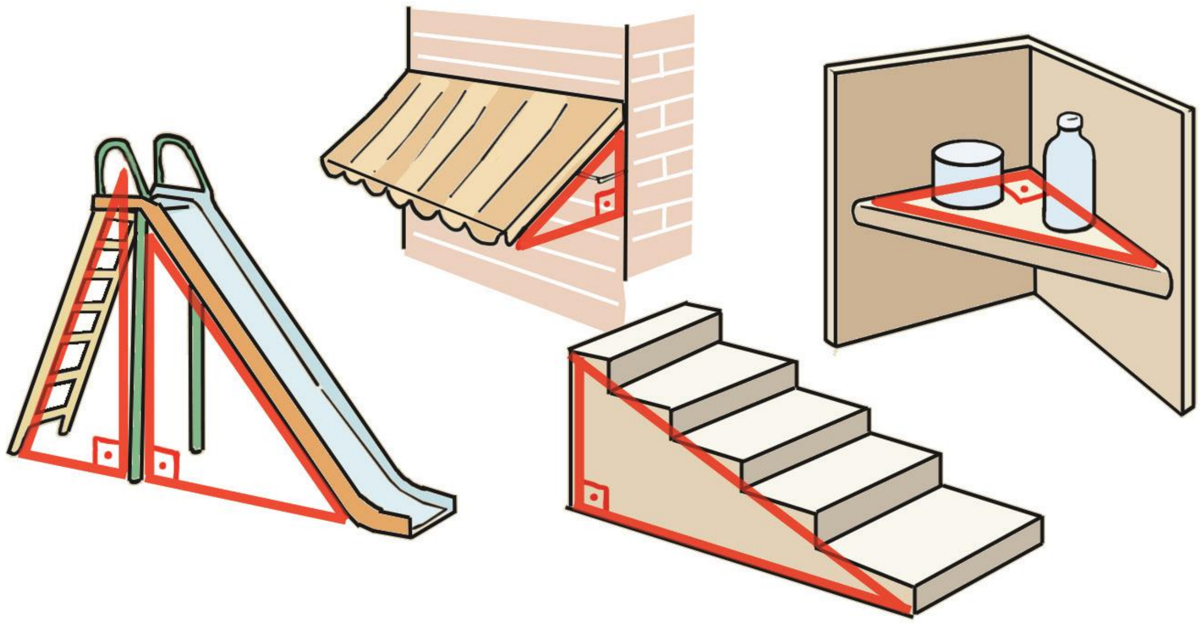


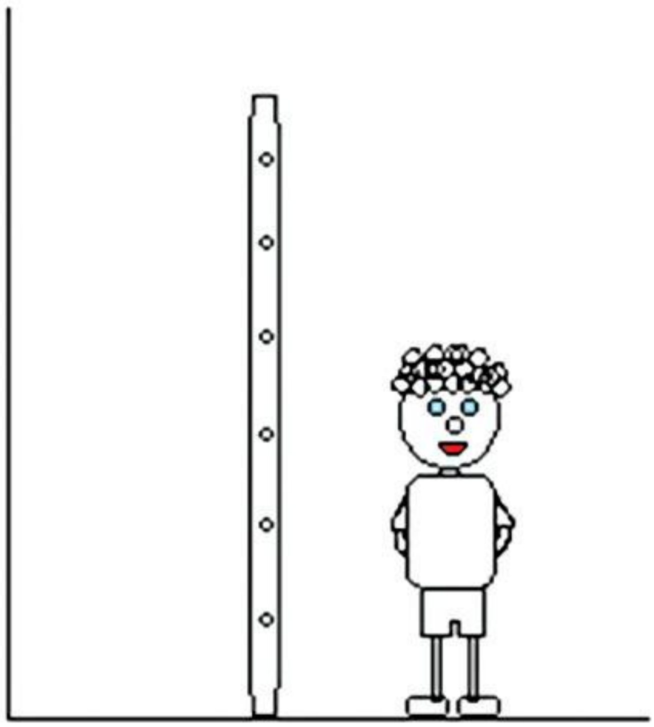
Figura 2: Alguns exemplos de objetos que possuem o formato ou que nos permitem enxergar triângulos retângulos. Você não acha que esses triângulos são muito mais comuns do que você imaginava?

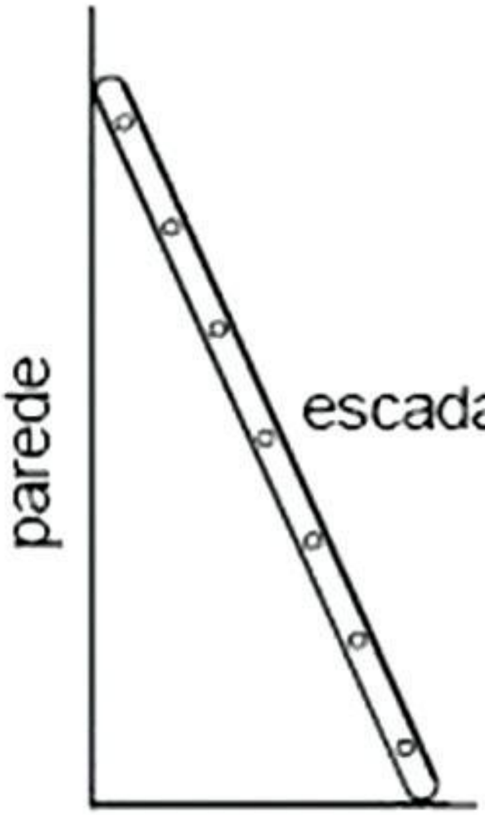
Além de estarem presentes em nossas casas, nosso trabalho, em ambientes fechados e

abertos, triângulos retângulos podem nos ajudar a resolver problemas importantes para nossa vida diária, tais como o do pedreiro Bruno.

Mas de que forma isso poderia acontecer?

Observe a imagem a seguir. Na primeira figura, um homem irá apoiar uma escada de madeira em uma parede. A segunda figura mostra como a escada fica. Você nota a presença de alguma figura geométrica?

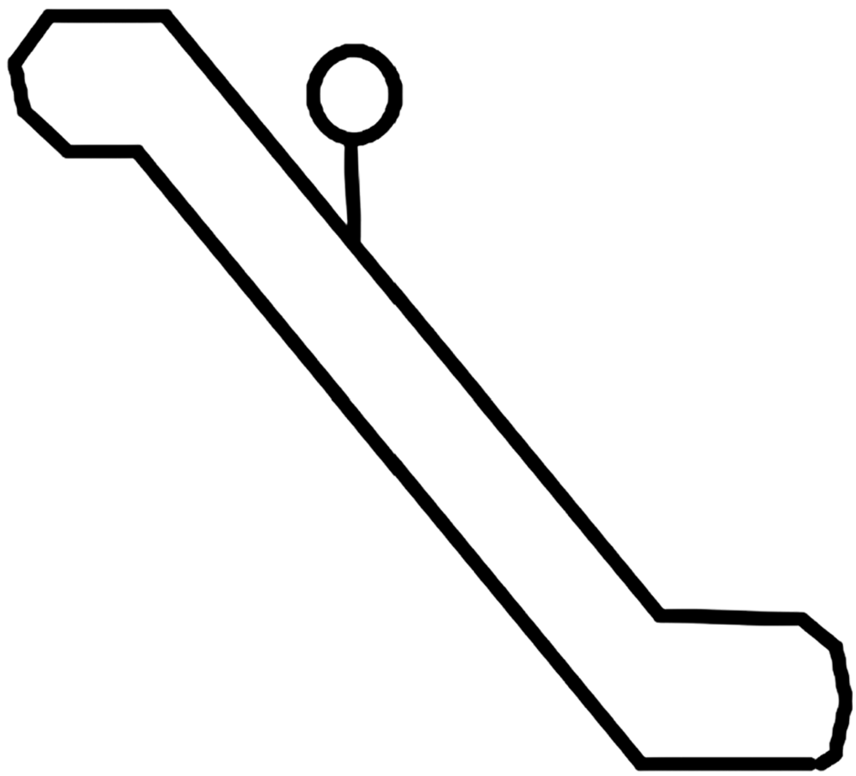



parede
escada

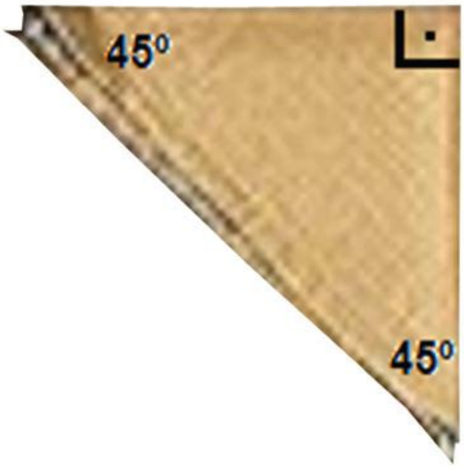
<pág. 31>

Você consegue observar a mesma figura nesta imagem?

E nesta representação de uma escada rolante? Ficou mais difícil?



Se prestarmos atenção aos triângulos retângulos, verificaremos que os ângulos de 30º, 45º e 60º são muito comuns.



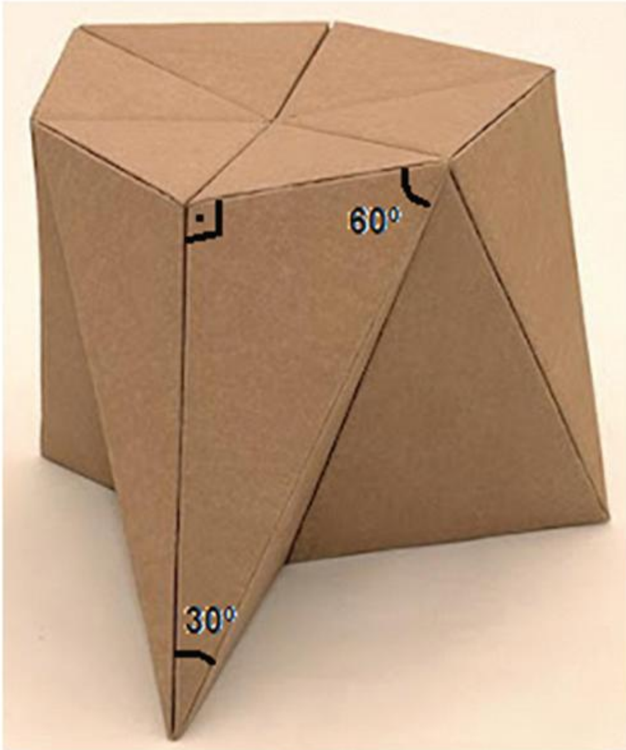


Figura 3: Um guardanapo de pano, dobrado em quatro partes, determina um triângulo retângulo, contendo o ângulo de 45º. Da mesma forma, o origami exibe alguns triângulos. Em destaque, um triângulo retângulo com os ângulos de 30º e 60º.

<pág. 32>

Tal como a atividade anterior, na figura a seguir, podemos perceber a presença de um triângulo retângulo que vai nos auxiliar a entender melhor como Bruno vai solucionar esse problema.

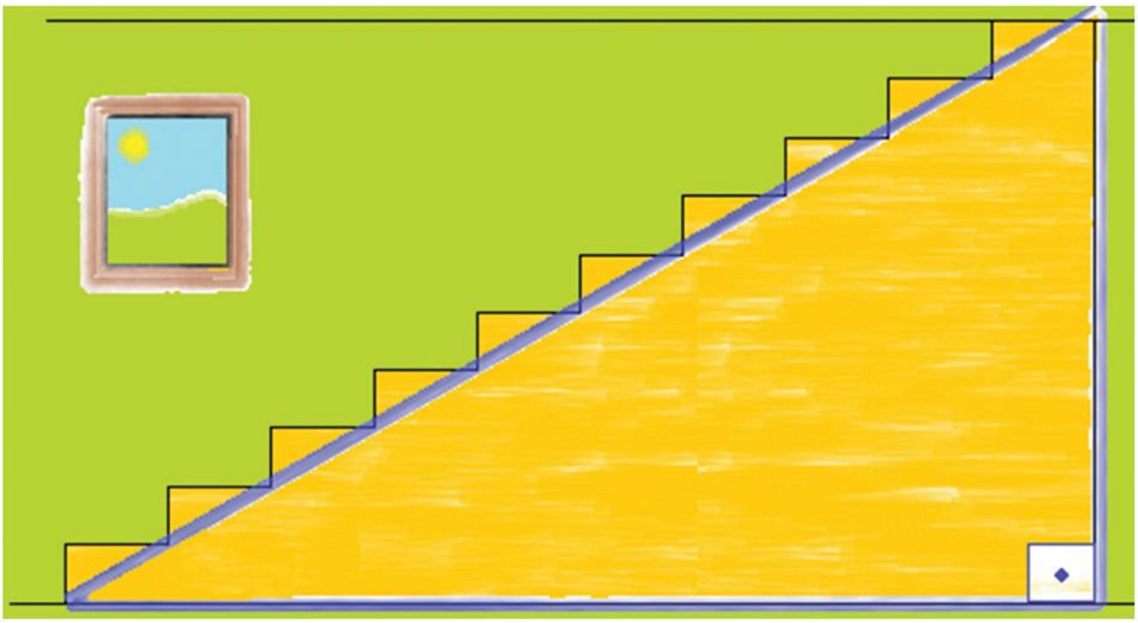


Figura 4: Com essa figura, fica fácil ver o triângulo retângulo, fica fácil ver que

o pé-direito da casa é um dos lados do triângulo e que o comprimento da escada é o outro lado, certo? Mas ainda não ficou claro como essas informações vão ajudar Bruno a descobrir qual o tamanho da escada que deve construir!

Diante disso, vamos entender de que forma a trigonometria aplicada nesses casos pode nos ajudar a resolver o problema de Bruno.

Verbete
Trigonometria

é um ramo da Matemática que estuda as relações entre os lados e os ângulos de um triângulo.
****

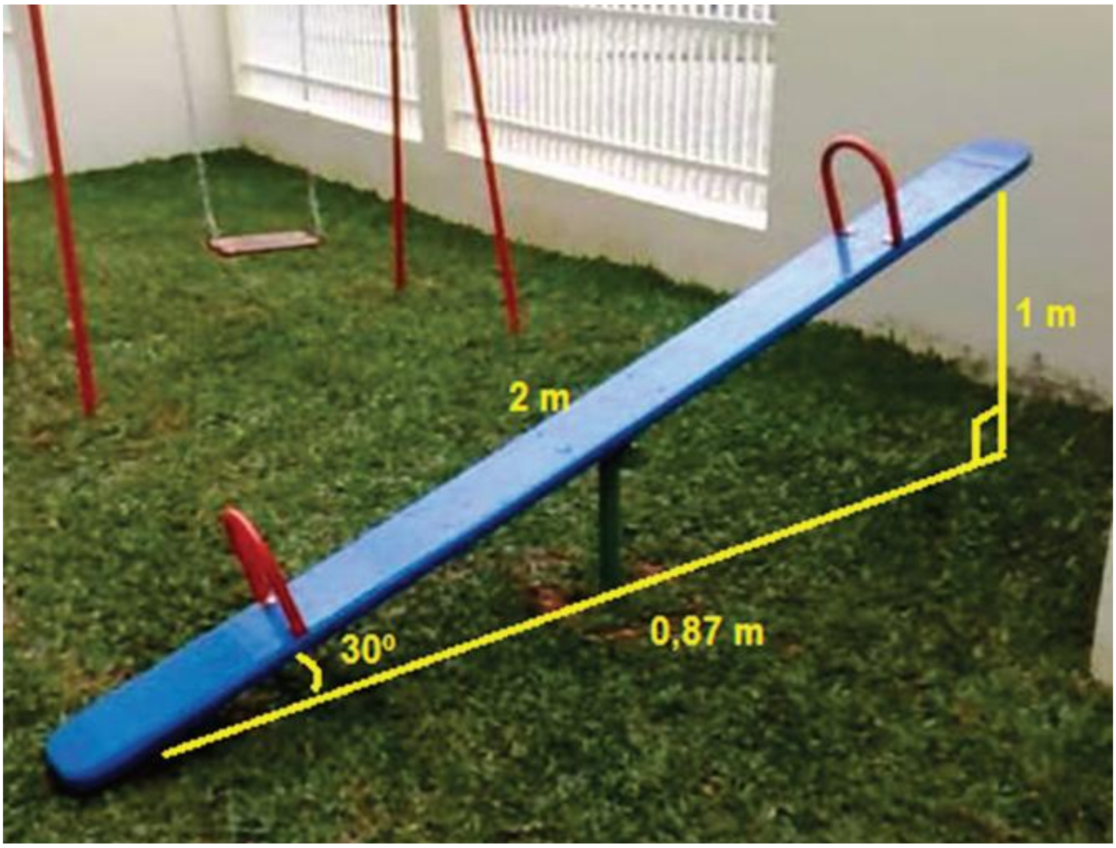
Para isso, vamos fazer a atividade a seguir.

Atividade 1

Observe os triângulos abaixo e faça o que se pede:
Todos são triângulos ________________________, pois possuem um ângulo de 90º. Além disso, em todos há um ângulo de 30º. Calcule o quociente entre a medida do

lado oposto ao ângulo de 30º e a medida do oposto ao ângulo de 90º em cada um dos triângulos.

a.



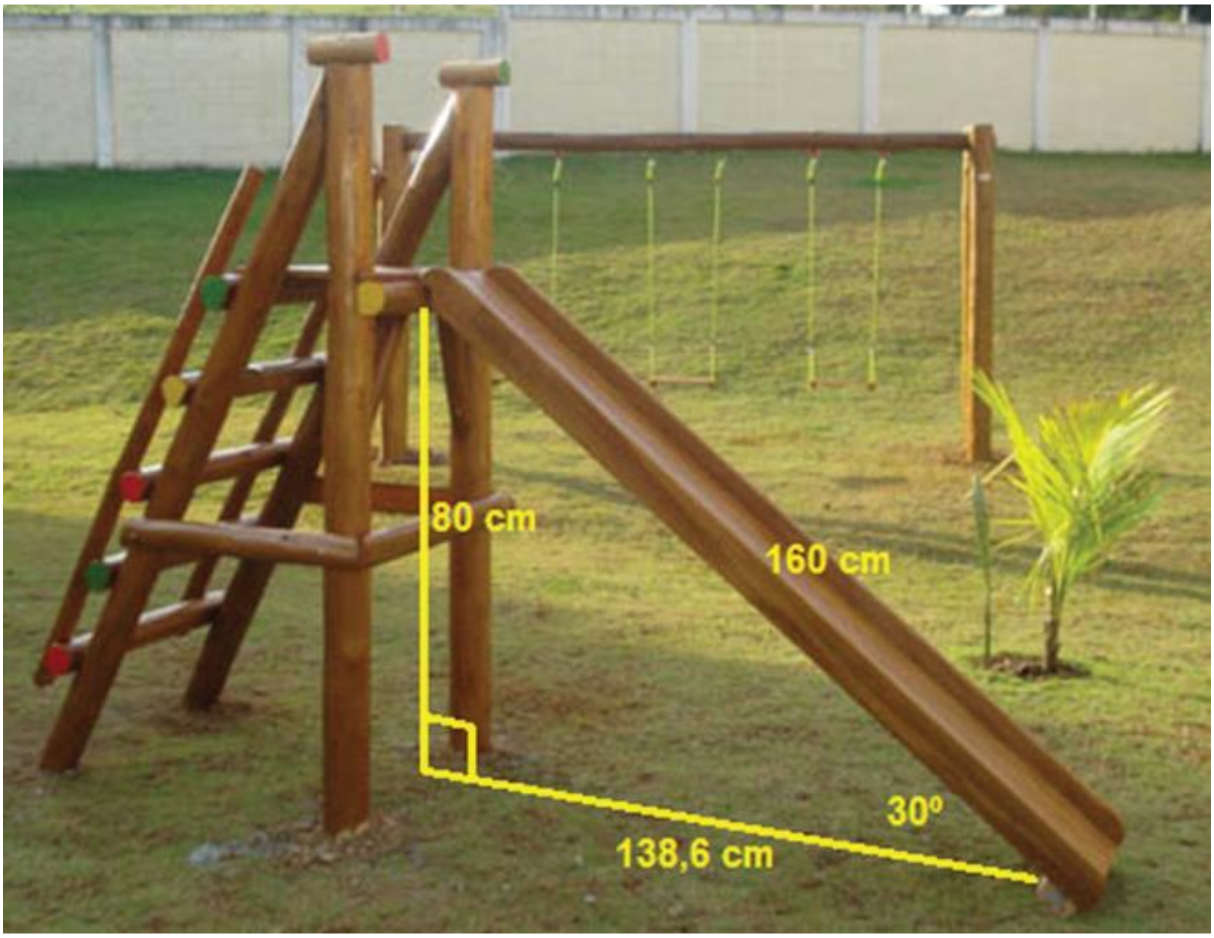
<pág. 33>

O lado oposto ao ângulo de 30º mede ______________.

Já o lado adjacente a este mesmo ângulo mede ___________________. Não confunda com o lado oposto ao ângulo de 90º que mede ______________________. Agora, calcule a razão (quociente) entre a medida do lado oposto ao ângulo de 30º e o oposto ao ângulo de 90º.

$$\frac{\text{lado oposto ao ângulo de } 30^\circ}{\text{lado oposto ao ângulo de } 90^\circ} =$$

b.



O lado oposto ao ângulo de 30º mede ________. Já o lado adjacente a este mesmo ângulo mede ______. Não confunda com o lado oposto ao ângulo de 90º que mede ______. Agora, calcule a razão (quociente) entre a

medida do lado oposto ao ângulo de 30º e o oposto ao ângulo de 90º. Com essa atividade, percebemos que a razão (quociente) entre o lado do triângulo oposto ao ângulo de 30º e o oposto ao de 90º tem sempre o mesmo valor. Esse valor é ____________________.

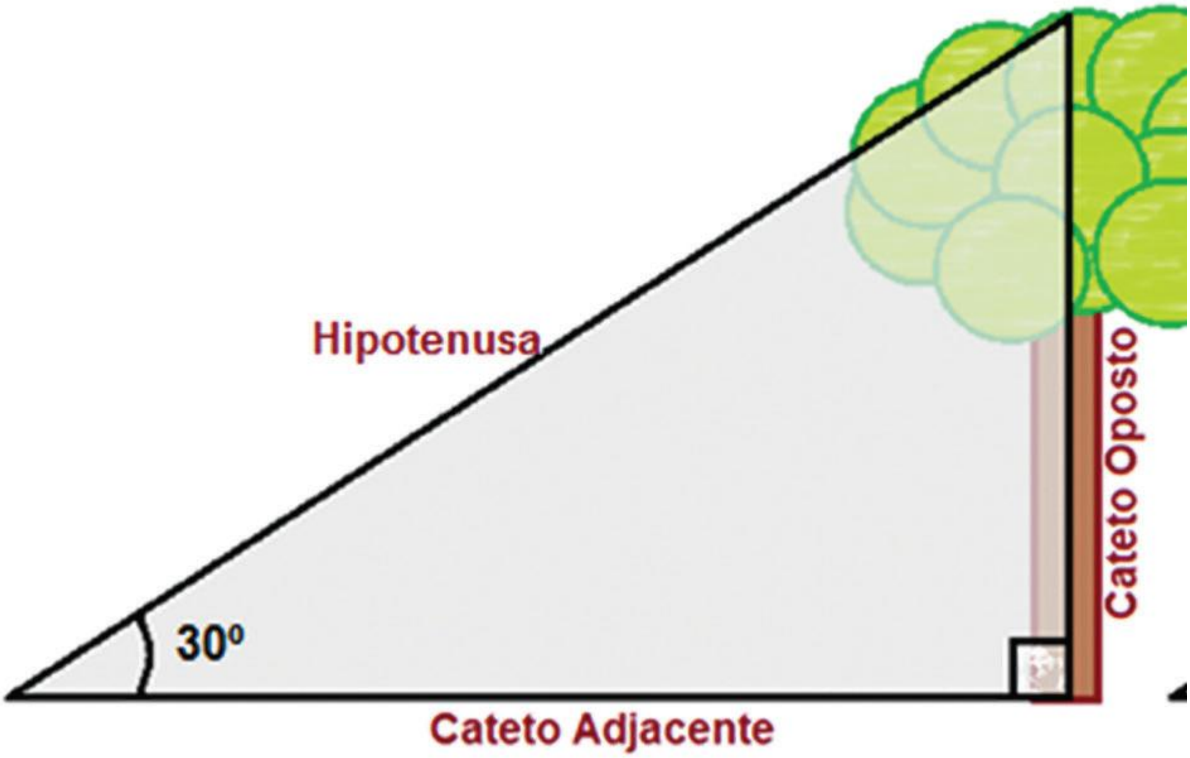
****

Observe a figura:

Você sabia que nos triângulos retângulos, o lado que se opõe ao ângulo de 90º (ângulo reto) é chamado de Hipotenusa e os demais lados são chamados de Cateto? Como há dois

catetos no triângulo, um deles estará em uma posição oposta ao ângulo agudo x e, por isso, será chamado de cateto oposto e o outro será o cateto adjacente (vizinho) ao ângulo.

<pág. 34>



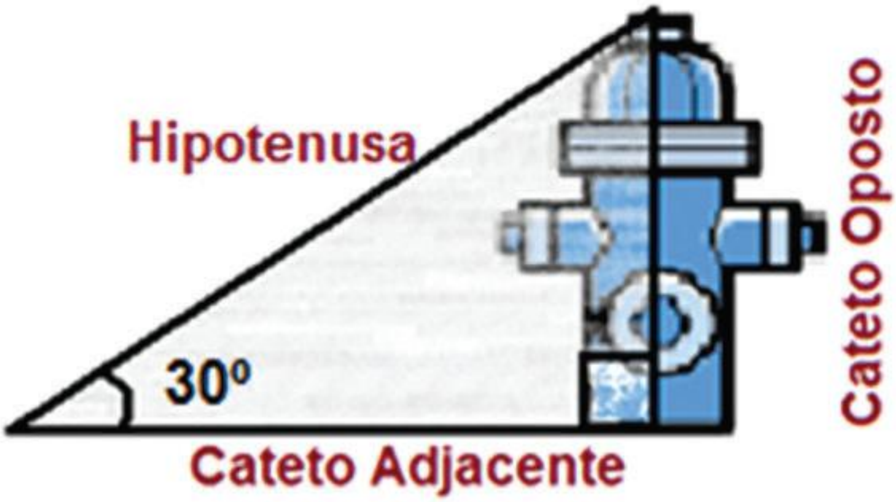


Figura 5: Representações de triângulos retângulos, seus catetos e a hipotenusa. Utilizamos nas duas figuras o ângulo de 30º, mas os nomes dos lados são usados em quaisquer triângulos retângulos.

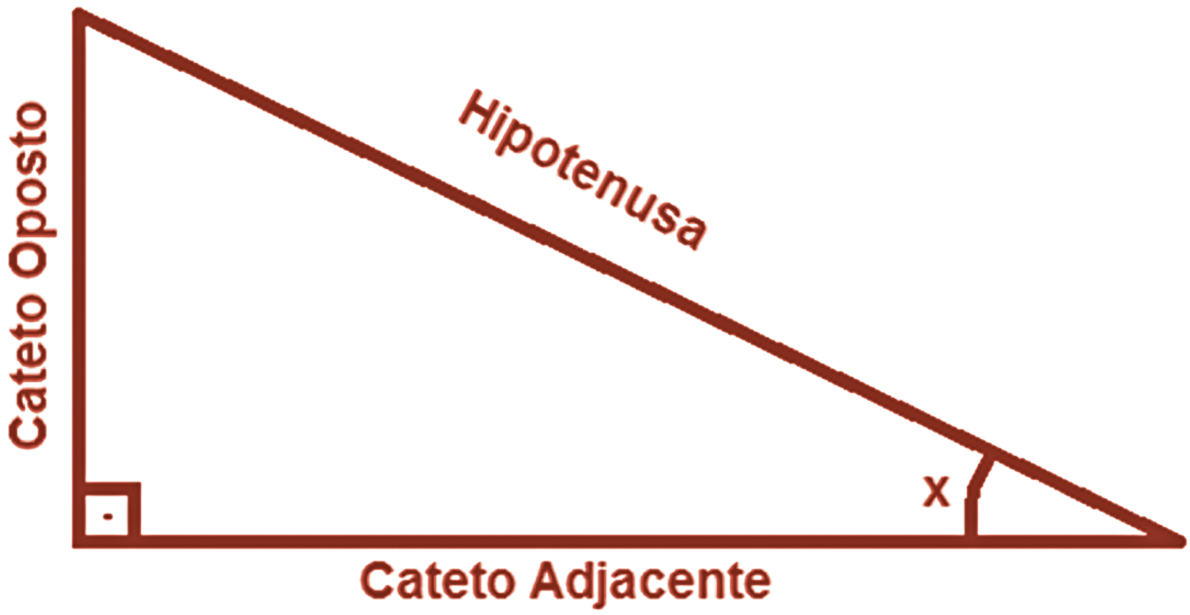
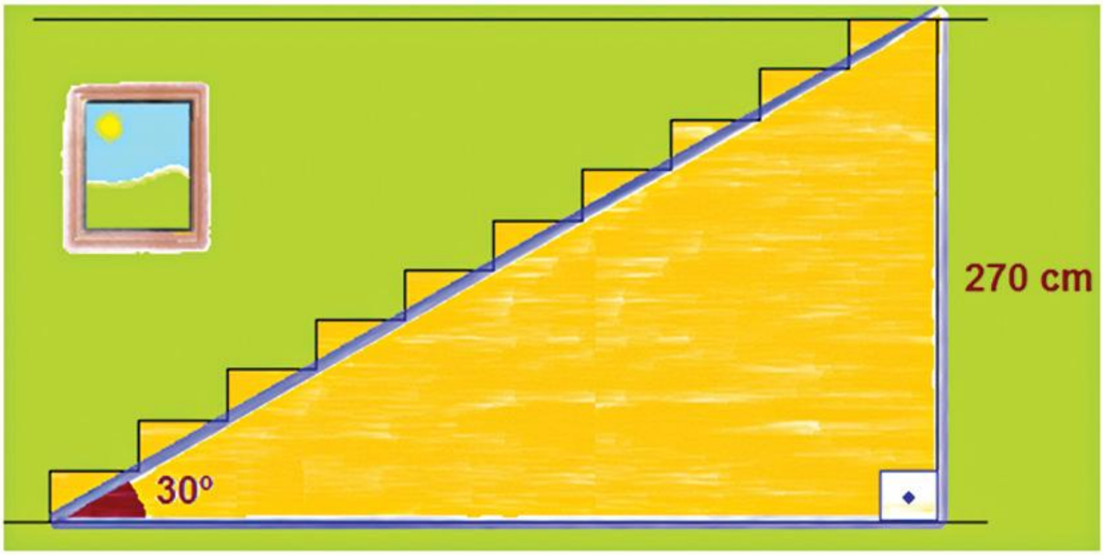


Figura 6: Triângulo retângulo, a hipotenusa e os catetos. O ângulo de 30º foi substituído pelo ângulo x que representa qualquer medida de ângulo.

Pessoal, acho que agora já temos todas as informações necessárias para auxiliar nosso amigo Bruno. Naquela ocasião, vimos que a escada deveria

ter uma inclinação de 30º em relação ao solo e que o pé direito da casa (a altura entre os andares da casa) era de 270 cm. Sendo assim, temos a seguinte figura:



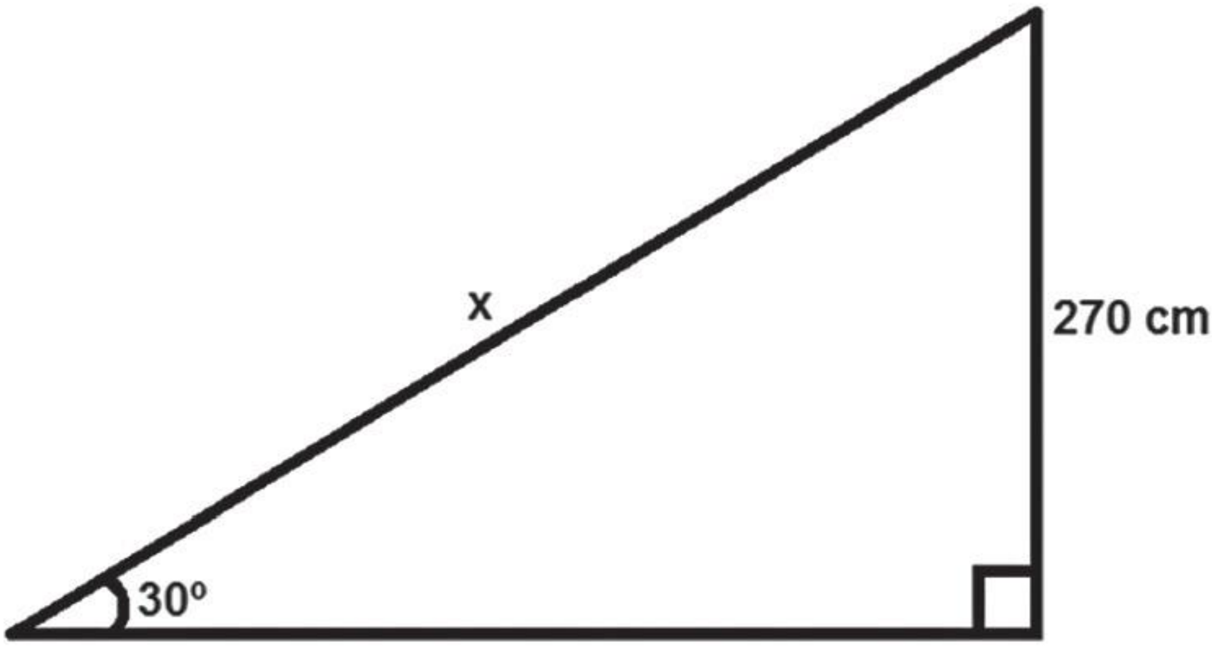


Figura 7: A escada a ser construída por Bruno, o pedreiro. Nesta figura, vemos um triângulo retângulo com o ângulo de 30º indicado, além do cateto oposto a ele com 270 cm de comprimento.

<pág. 35>

Podemos verificar que o cateto oposto ao ângulo de 30º é o 270, e o comprimento x é a hipotenusa do triângulo, Como poderemos calcular o comprimento x da escada?

Para resolvermos o problema de Bruno, vamos

nos lembrar da atividade 1 onde pudemos trabalhar com triângulos semelhantes a este. Naquela ocasião, percebemos que a razão entre o cateto oposto ao ângulo de 30º e a hipotenusa (lado oposto ao ângulo de 90º) sempre vale ½.

Vamos utilizar essa dica e as informações dadas no problema para calcularmos a medida x:

$$\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{270}{x}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{270}{x}$$

$x = 270 . 2$

$x = 540$ cm

Com isso, verificamos que a escada terá 540 cm de comprimento. Este valor será aproximadamente a medida do corrimão da escada. Além disso, se pensarmos que cada degrau tem 18 cm de altura, então a escada terá 270 ÷ 18 = 15 degraus.

Agora, desejamos um bom trabalho ao nosso amigo Bruno e vamos seguir o nosso caminho.

Vimos até o momento que a razão entre o cateto oposto ao ângulo de 30º e a

hipotenusa é sempre igual a ½. Mas, não é só o ângulo de 30º que tem esse privilégio. Todos os ângulos agudos possuem esta característica. Porém, cada um deles possui um valor diferente para esta razão.

Verbete

Ângulo agudo

Um ângulo agudo é aquele que é menor que 90º

****

Pelo que estamos vendo, isso é mais importante do que imaginávamos. E é verdade. Essa razão entre o cateto oposto e a hipotenusa é tão importante

que recebe um nome específico para isso*: SENO*. Portanto, quando quisermos nos referir à razão entre o cateto oposto e a hipotenusa de um ângulo, estaremos fazendo referência ao SENO deste ângulo.

Sendo assim, vamos conhecer alguns valores desta razão. Que tal os senos dos ângulos de 45º e de 60º? Afinal, vocês se lembram que esses ângulos são muito comuns no nosso dia a dia, não é?!

Ângulo	Seno
30º	$\frac{1}{2}$
40º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Tabela 1: Nesta tabela, vemos os valores dos senos de 30º, 45º e de 60º. Da mesma maneira que trabalhamos com o ângulo de 30º, podemos agir com os demais ângulos. Ou seja, a razão entre o cateto oposto ao ângulo de 45º,

por exemplo, e a hipotenusa vale sempre $\frac{2}{2}$.

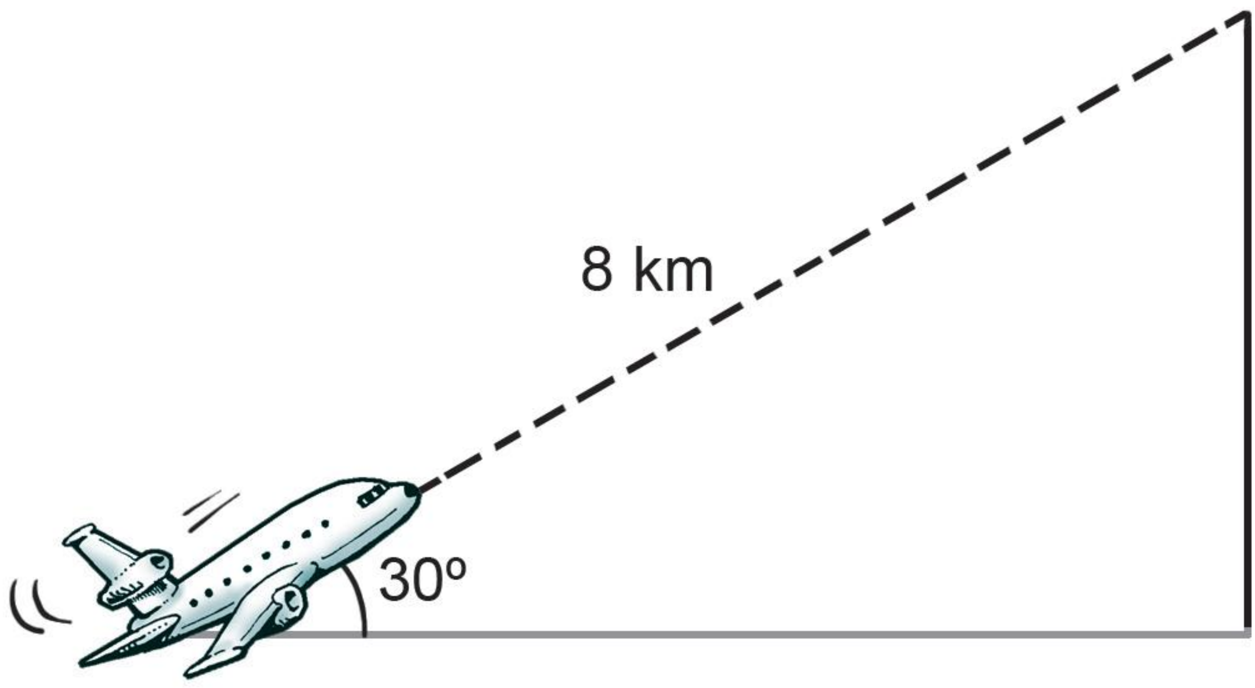
<pág. 36>

Agora, é sua vez! Resolva os problemas a seguir, utilizando os conhecimentos que adquirimos até agora.

Atividade 2

Um avião levanta voo sob um ângulo de 30º. Depois de percorrer 10 km, a que altura se encontra este avião?

38



******

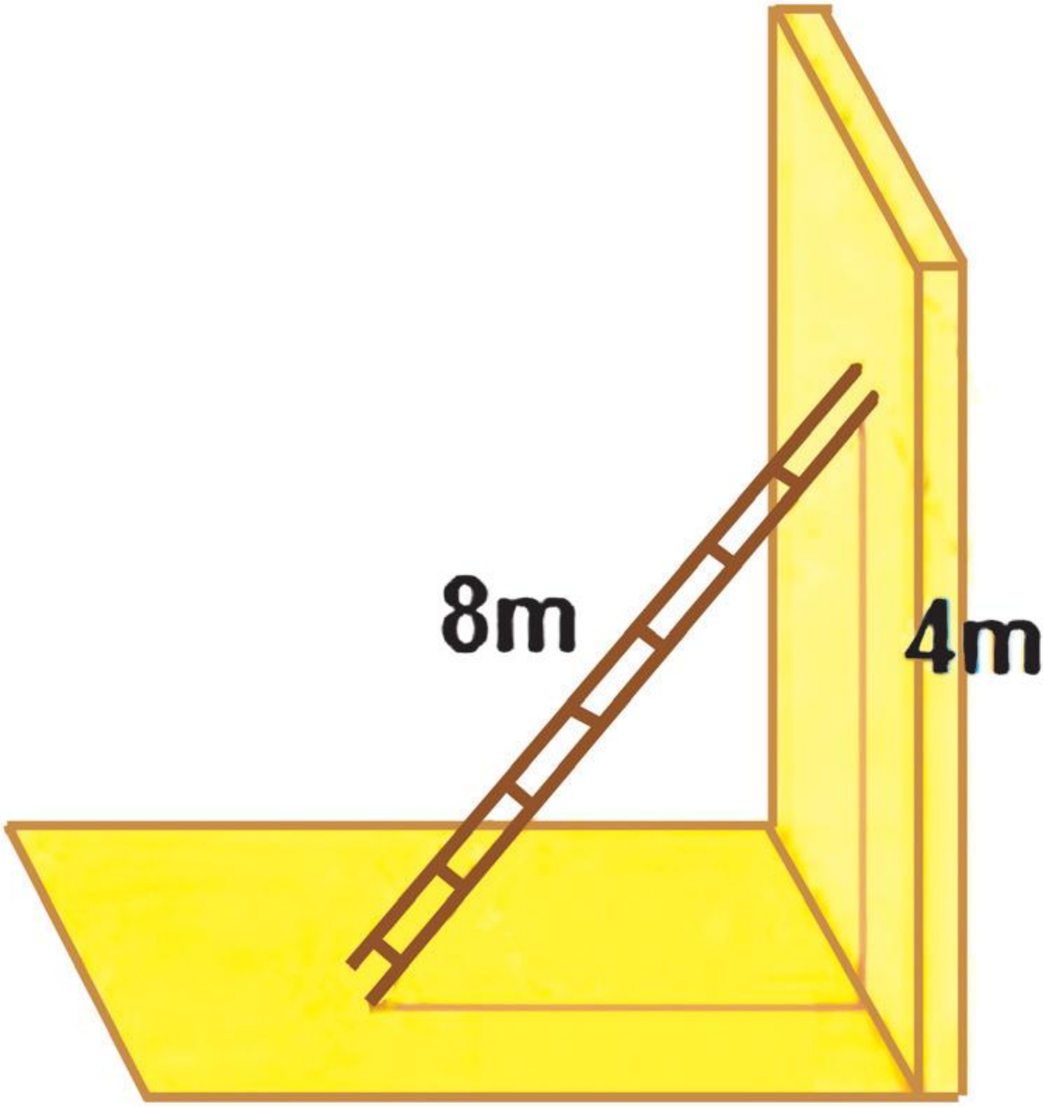
Uma escada de 8 metros de comprimento está apoiada em um ponto de uma parede a 4 metros de altura. Qual das opções abaixo traz o ângulo de inclinação da escada em relação à parede?

(a) 30º

(b) 45º

(c) 60º

(d) 90º



******

Muito bem! Estamos cada vez melhores!

Mas uma curiosidade está aparecendo agora: será que existem outras razões nesses triângulos retângulos? Por exemplo, a razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa? Ou a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente?

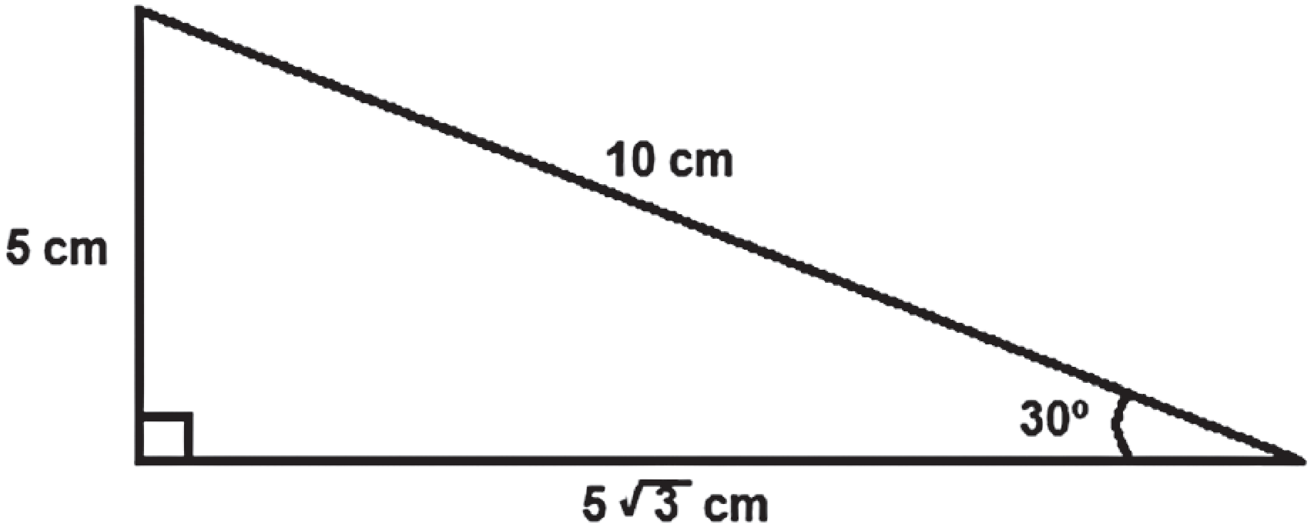
Vamos dar uma olhadinha nosso? Observe os triângulos abaixo e faça a atividade a seguir:

<pág. 38>

Atividade 4

Complete as lacunas de acordo com cada figura.

a.



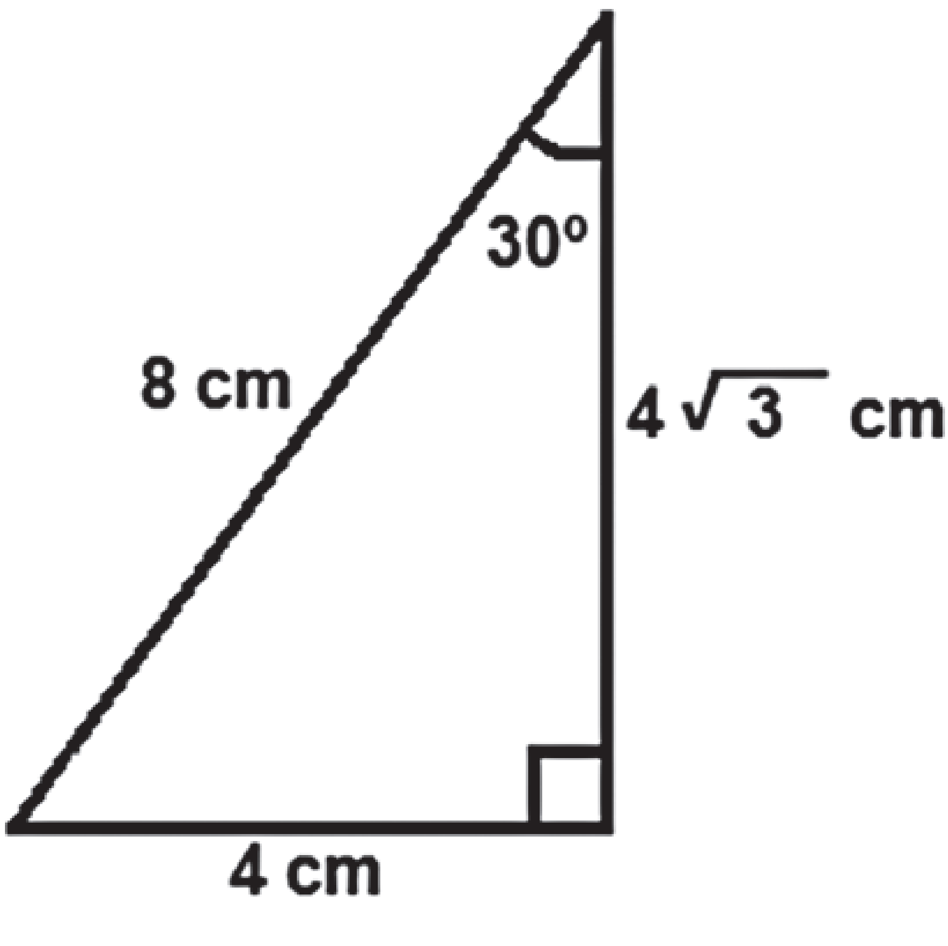
.Nesta figura, o cateto oposto ao ângulo de 30º mede ________________. O cateto adjacente a este ângulo mede ________________ e a hipotenusa mede ________________.

.A razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa pode ser representada através da fração ______________________.

42

.A razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo de 30º pode ser representado através da fração ____________________.

b.



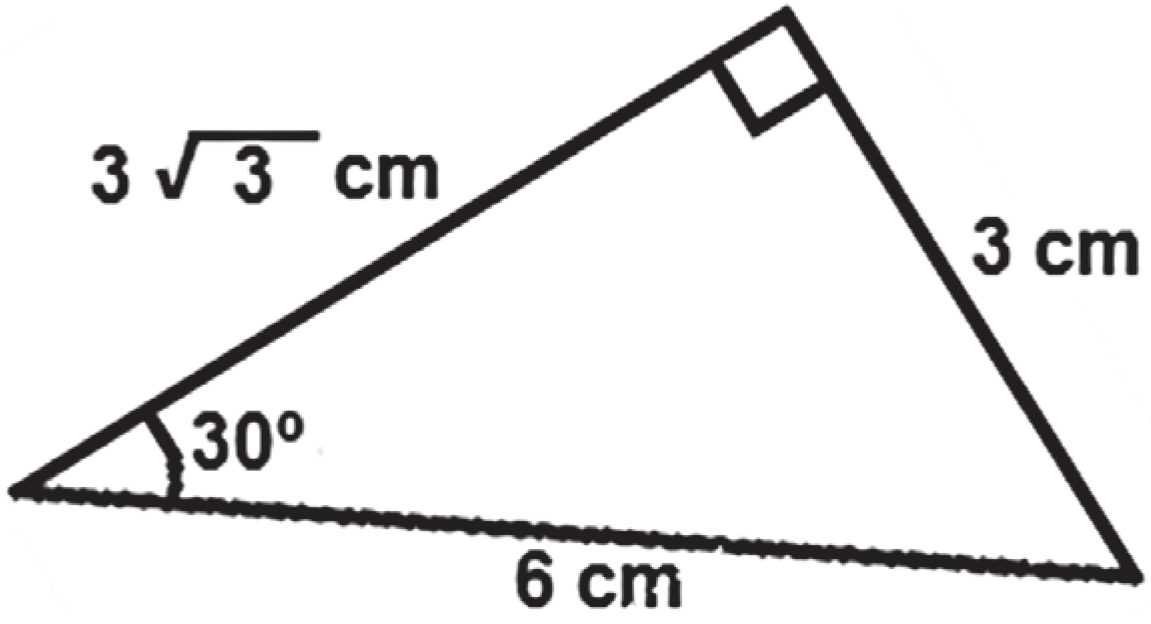
.Nesta figura, o cateto oposto ao ângulo de 30º mede _______________. O cateto adjacente a este

ângulo mede ________________ e a hipotenusa mede _________________.

.A razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa pode ser representada através da fração _______________________.

.A razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo de 30º pode ser representado através da fração _________________________.

c.



<pág. 39>

.Nesta figura, o cateto oposto ao ângulo de 30º mede _______________. O cateto adjacente a este ângulo mede _______________ e a hipotenusa mede _______________.

.A razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa pode ser representada através da fração ________________________.

.A razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo de 30º pode ser representado através da fração ________________________.

****

Ora, ora... Pelo que estamos percebendo, esses valores também são recorrentes. E será que essas razões também possuem um nome especial? É claro que sim!

A razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa chama-se *COSSENO*. Já a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente chama-se *TANGENTE.*

Importante

Isto é:

seno

seno do ângulo x =

$$\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

cosseno do ângulo x =

$$\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

tangente do ângulo x =

$$\frac{\textbf{cateto oposto}}{\textbf{cateto adjacente}}$$

****

<pág. 40>

Além disso, assim como ocorre com o seno, os ângulos de 45º e 60º também possuem seus valores específicos. Veja no quadro a seguir:

	30º	45º	60º
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Tabela 2: Aqui são mostrados os valores de seno, cosseno e tangente. Esses valores são muito importantes. Tenha muita atenção!

Multimídia

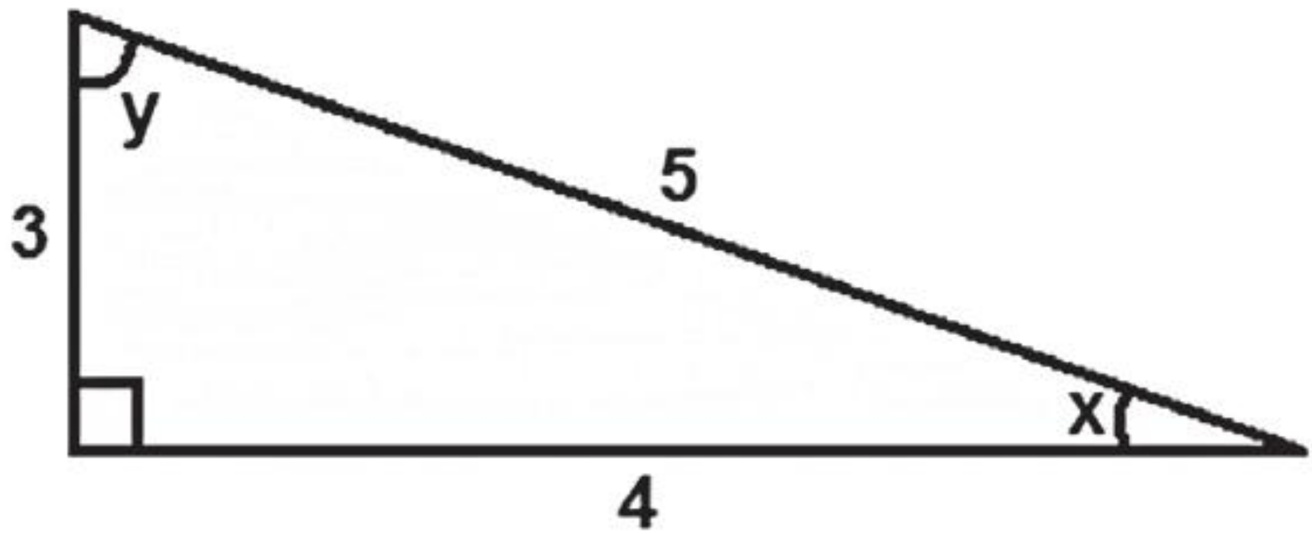
Clique neste *link* para assistir a um vídeo que mostra a demonstração matemática dos valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30º, 45º e 60º. Vale a pena conferir! http://www.youtube.com/watch?v=AllG-nig6qQ

******

Agora, vamos ver como podemos utilizar esses valores e o que aprendemos até agora para resolvermos as mais diversas atividades.

Atividade 5

Observe o triângulo abaixo e indique os valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos abaixo:



Seno de x =

Seno de y =

Cosseno de x =

Cosseno de y =

Tangente de x =

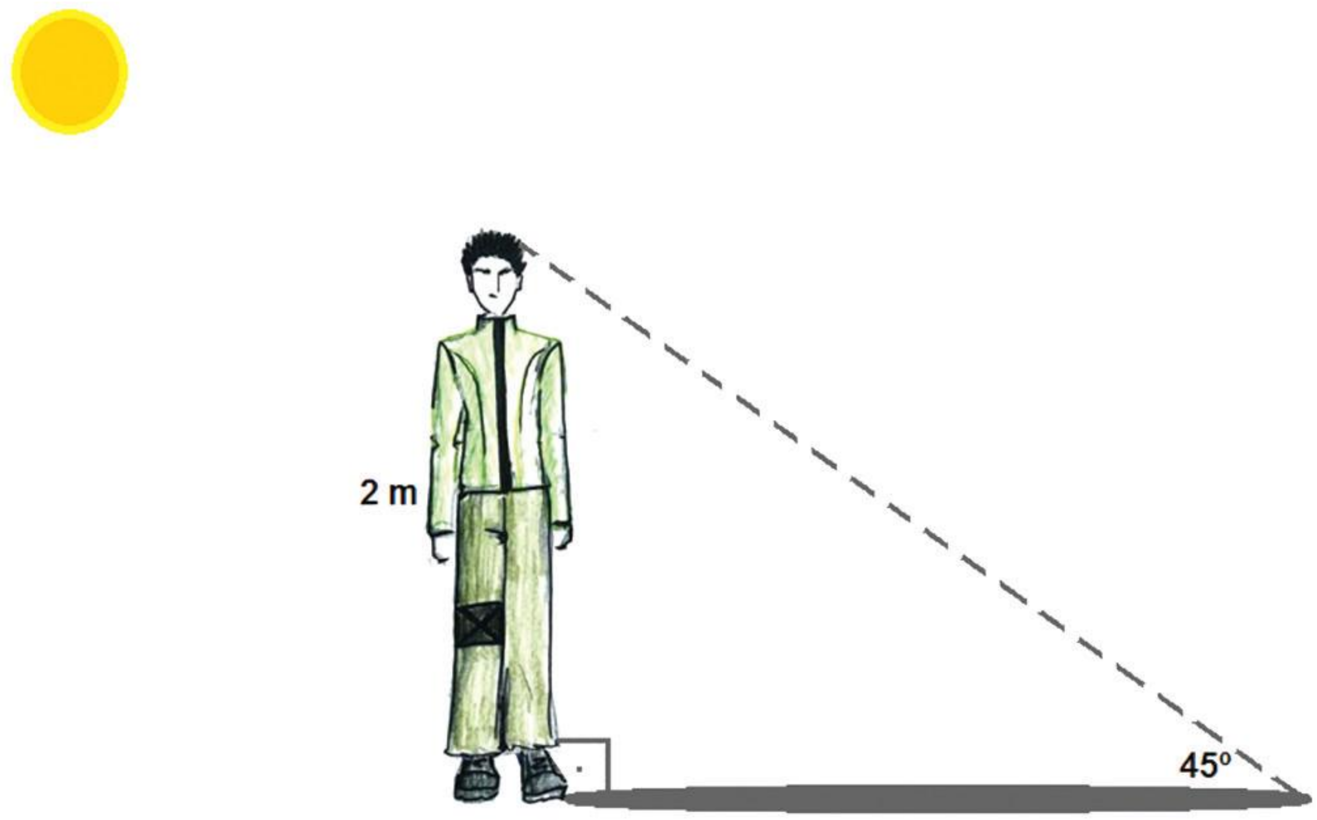
Tangente de y =

******

<pág. 41>

Atividade 6

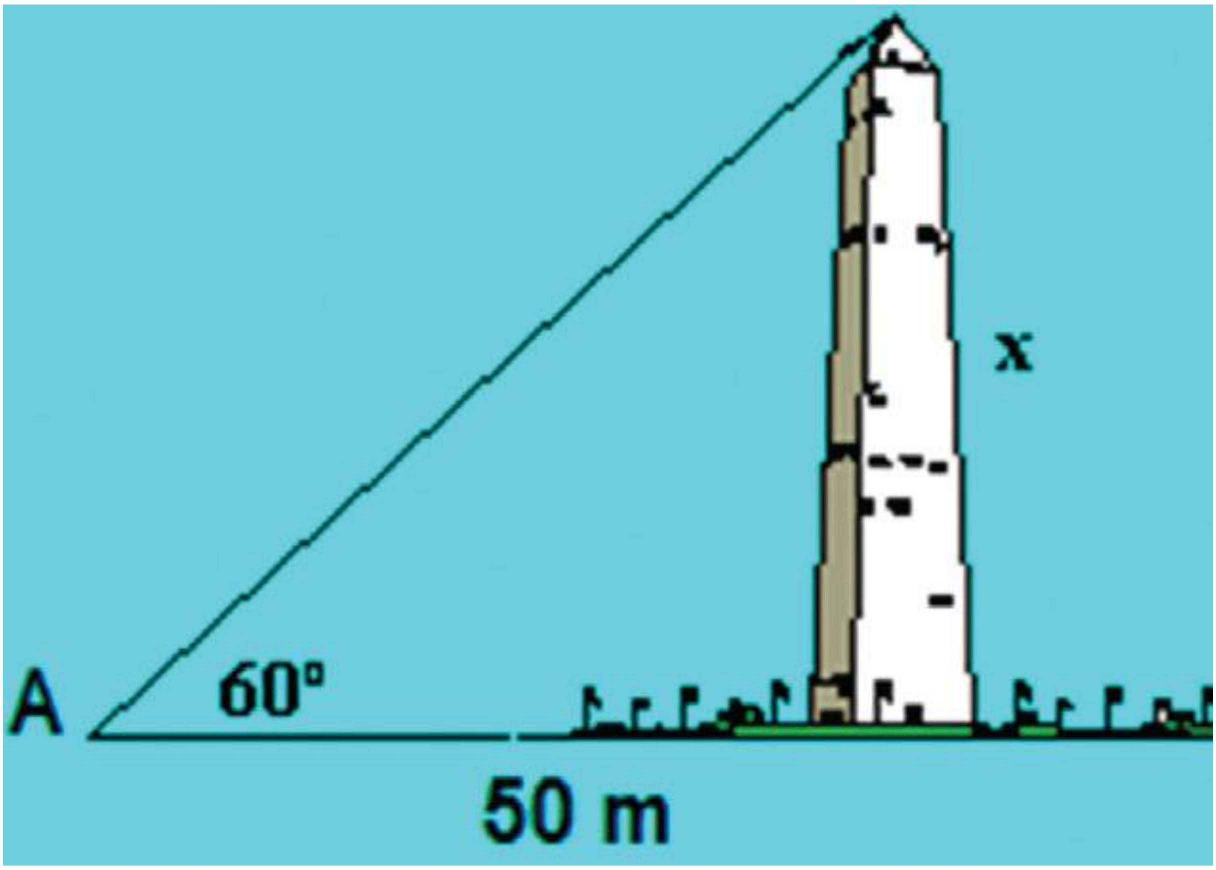
Uma pessoa de 2 metros de altura está exposta ao sol. Os raios solares incidem no solo sob um ângulo de 45º, como mostrado na figura. Qual a medida da sua sombra projetada no solo?



******

Atividade 7

De um ponto A, a 50 metros de distância, uma pessoa enxerga o topo de um obelisco, segundo um ângulo de 60º. Qual é a altura desse obelisco?

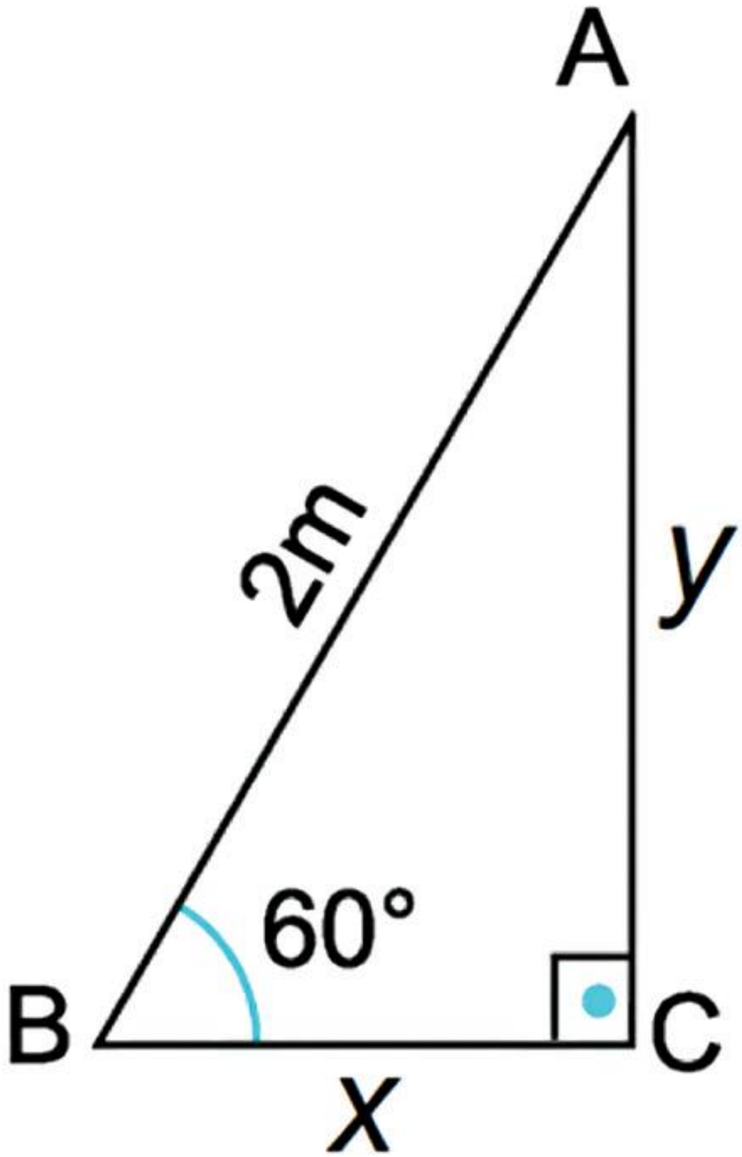


******

<pág. 42>

Atividade 8

A figura a seguir possui duas medidas desconhecidas. Utilize as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) para determiná-las.



******

Muito bem, pessoal. Verifiquem as respostas no final desta unidade.

Pelo visto, este assunto já está na ponta da língua. Mas se ainda não estiver, a

sugestão é procurar fazer os exercícios da seção “O que perguntam por aí?”.

Surge, agora, mais uma curiosidade: essas razões trigonométricas só podem ser usadas em triângulos retângulos? Seria muito interessante, se conseguíssemos trabalhar com a trigonometria em outros tipos de triângulos, não acham? Então, vamos seguir para a próxima seção onde falaremos exatamente deste assunto.

Seção 2

A Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos

Até agora, vimos como lidar com as razões trigonométricas em um triângulo retângulo. Mas será que só podemos trabalhar com a Trigonometria em triângulos deste tipo? Afinal, nem sempre estaremos diante de triângulos retângulos. Sendo assim, como faremos? Observe a situação a seguir:

Dona Clotilde quer vender o seu terreno, mas para isso, quero saber qual a sua área, pois isso influenciará diretamente no preço que cobrará por ele. Vejamos o terreno de Dona Clotilde.

<pág. 43>

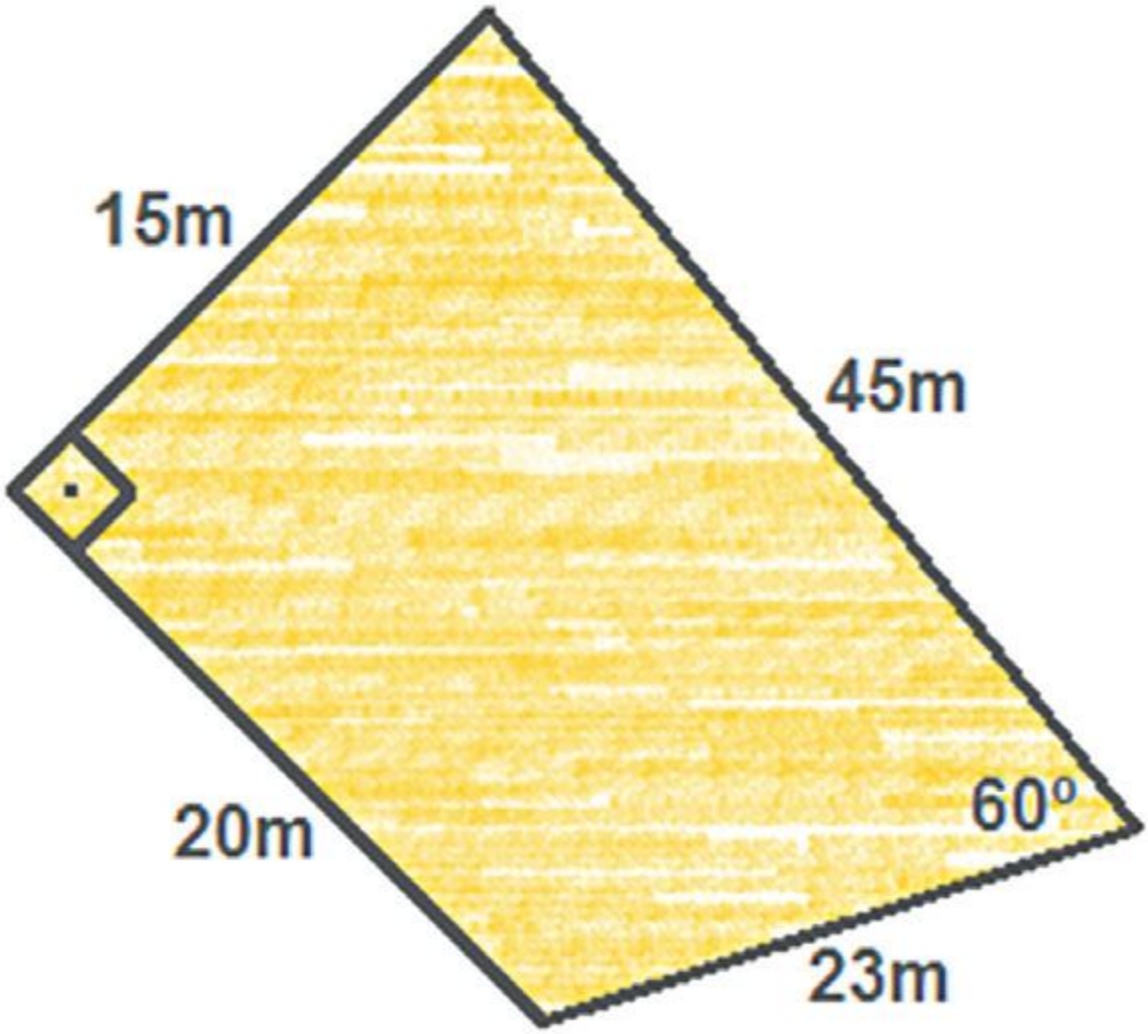


Figura 8: Terreno de Dona Clotilde em forma de um quadrilátero irregular. Podemos visualizar um ângulo reto e outro ângulo de 60º.

Para resolver o problema, Dona Clotilde dividiu seu terreno em duas partes. Vamos observar na figura a seguir que a área 1 é um triângulo retângulo e que, por isso, sua área pode ser calculada, multiplicando-se um cateto pelo outro e dividindo-se por 2. Assim:

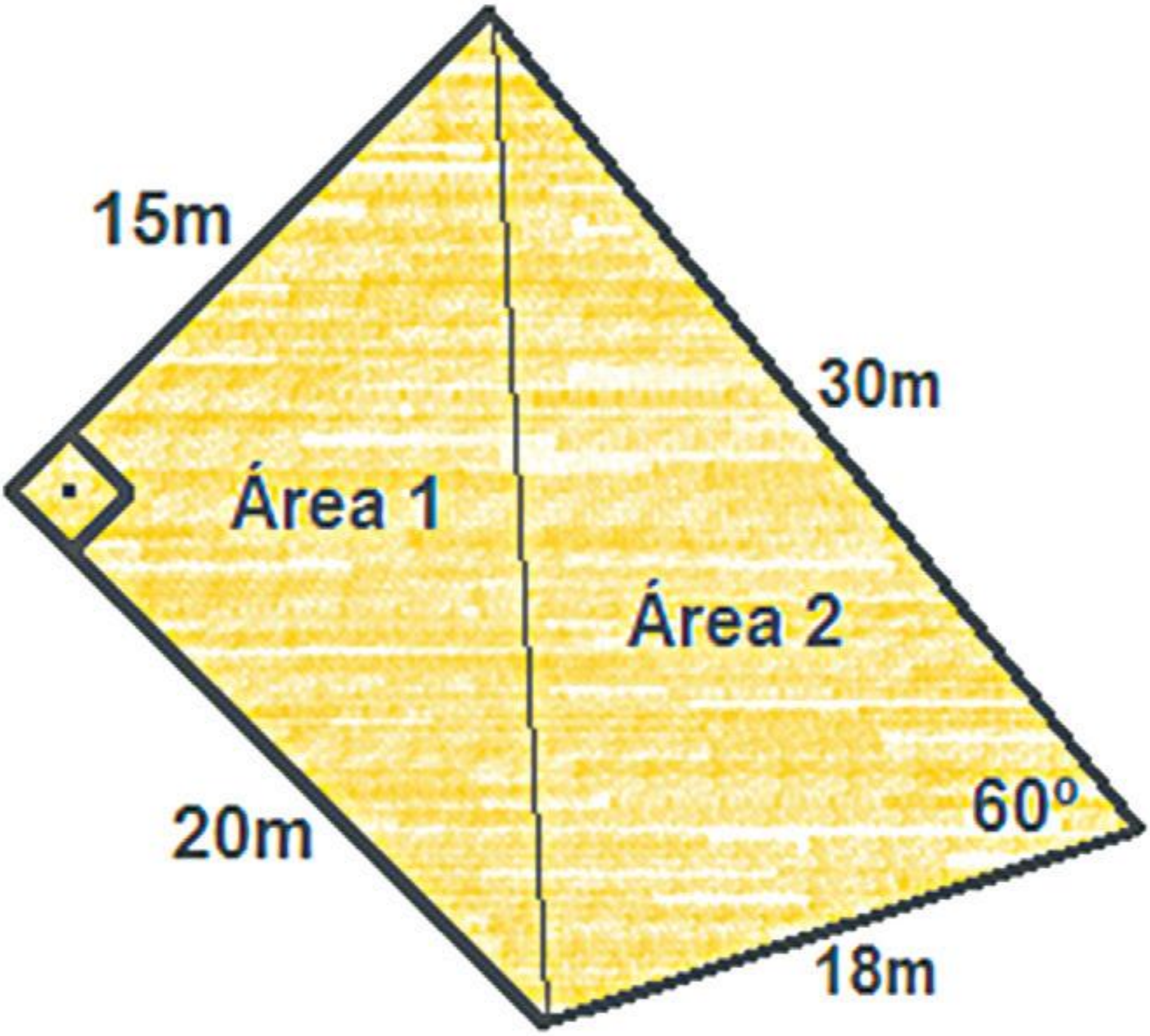


Figura 9: O terreno está dividido em duas áreas. Uma delas é um triângulo retângulo e o outro é um triângulo qualquer.

Cálculo da área 1:

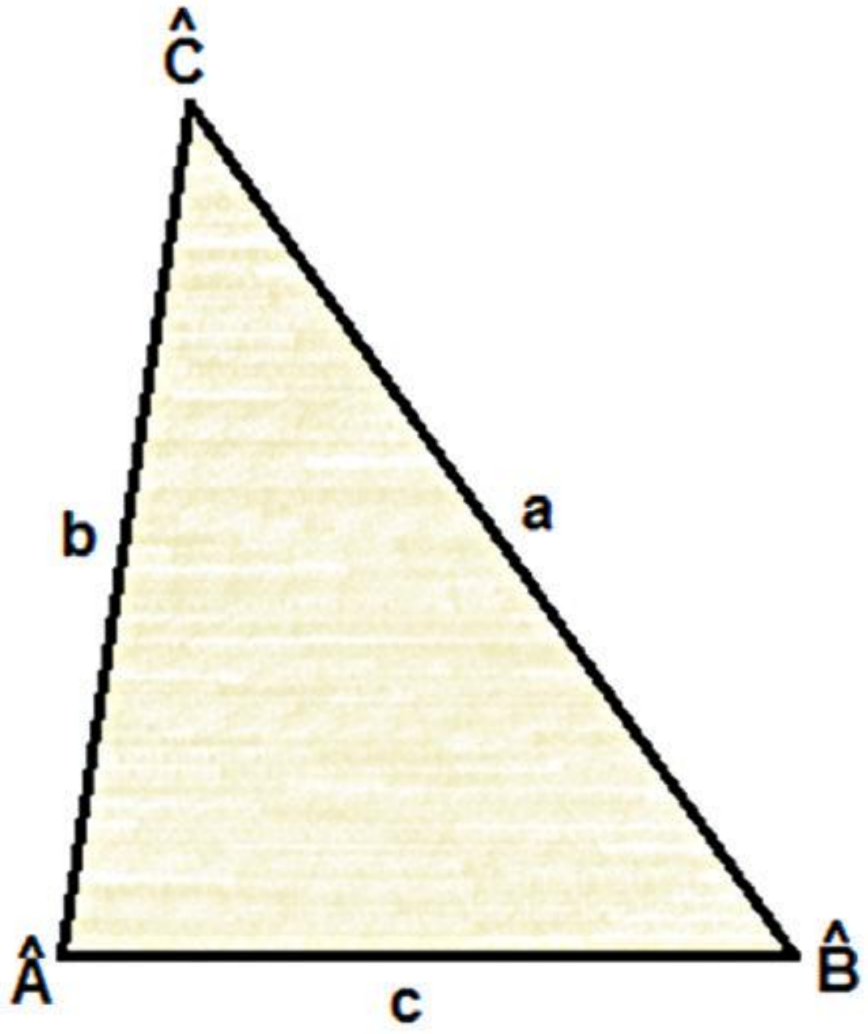
$$\frac{20.15}{2} = \frac{300}{2} = 150m^2$$

Para o cálculo da área 2, Dona Clotilde utilizou uma fórmula um pouco diferente. Nesta fórmula, levamos em consideração dois lados do triângulo e o ângulo formado por eles. Ou seja, Área = ½ (b.c.sen Â). Com isso, bastou multiplicar 30 por 18 e pelo seno de 60º e, em seguida, dividir por 2 para obter a área 2 no valor aproximado de 234m². Totalizando, portanto, uma área de 150 + 234 = 384m².

A fórmula utilizada para resolver o problema de Dona Clotilde permite-nos calcular a área de um triângulo qualquer. Além

disso, podemos utilizar qualquer um dos três ângulos para isso, desde que usemos os lados correspondentes do triângulo e o resultado será o mesmo! Vejamos:

<pág. 44>



$$\text{área} = \frac{1}{2}\,(b.c.\text{sen}\hat{A})$$

$$\text{área} = \frac{1}{2}\,(a.b.\text{sen}\hat{C})$$

$$\text{área} = \frac{1}{2}\,(a.b.\text{sen}\ \hat{B})$$

Figura 10: Um triângulo qualquer como seus respectivos lados e ângulos. Notemos que não há necessariamente a presença de um ângulo reto ou mesmo dos ângulos notáveis (30º, 45º ou 60º).

Em todos esses casos, a área tem o mesmo resultado. Portanto, podemos dizer que:

$$\frac{1}{2}(b.c.sen\hat{A}) =$$

$$\frac{1}{2}(a.b.sen\hat{C})$$

$$b.c.sen\hat{A} = a.b.sen\hat{C}$$

$$c.sen\hat{A} = a.sen\hat{C}$$

$$\frac{a}{\text{sen´}} = \frac{c}{sen\hat{C}}$$

Se trabalharmos com a igualdade $\frac{1}{2}(b.c.sen\hat{A}) =$

$\frac{1}{2}$ *(a.c.sen$\hat{B}$)*, **conseguiremos a expressão:**

$$\frac{a}{\text{sen}\,´} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}}$$

Sendo assim,

$$\frac{a}{\text{sen}\,´} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}}$$

Esta razão entre o lado e o seno do seu ângulo oposto é constante para todos os lados do triângulo. A esta igualdade, damos o nome de *Lei dos Senos.*

Vamos praticar um pouco?

Atividade 9

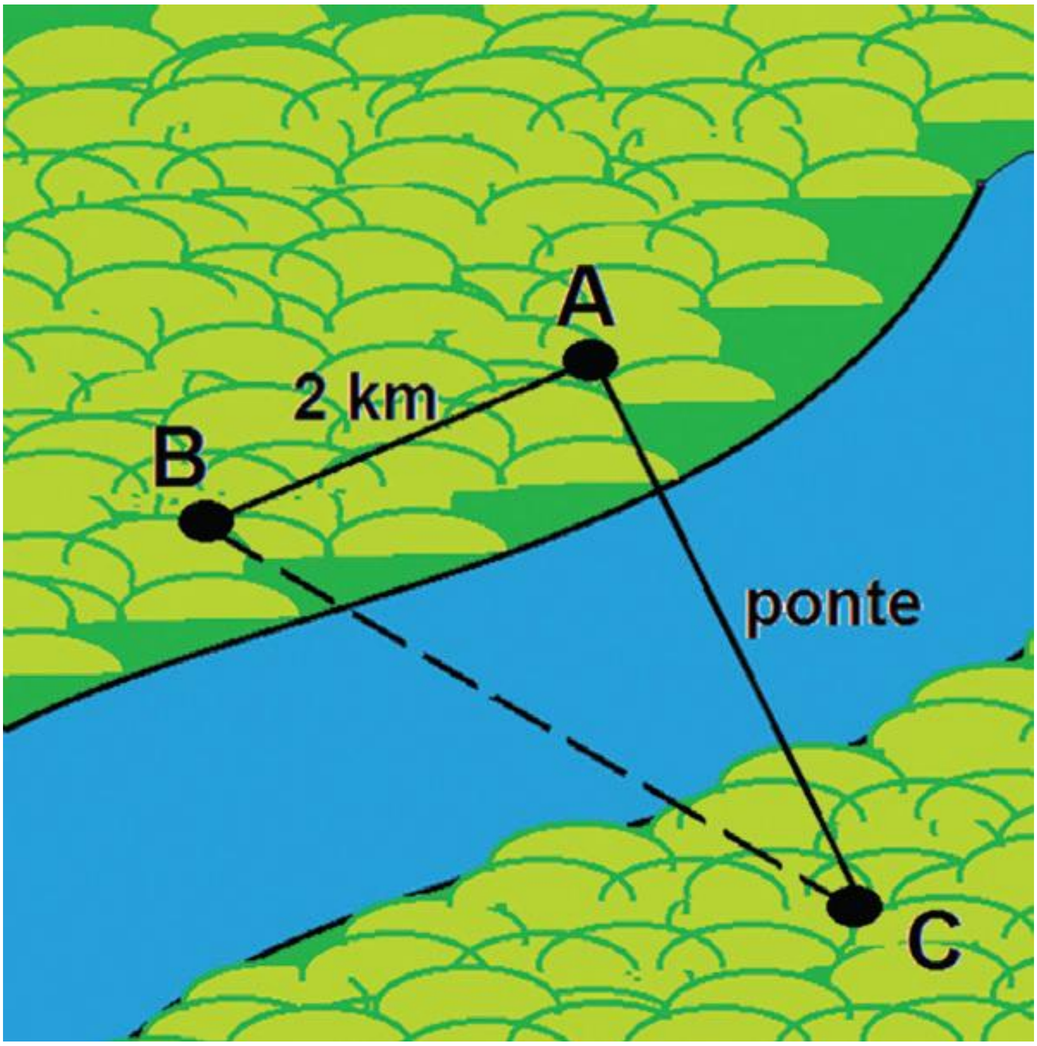
Uma construtora quer colocar uma ponte ligando os pontos A e C do mapa abaixo. Mas, precisava calcular a distância entre esses pontos. Dispunha apenas de um teodolito. Do ponto A, caminhou até o ponto B, na mesma margem a 2 quilômetros de distância.

Verbete

Teodolito é um instrumento óptico, utilizado para medir ângulos verticais e horizontais.

******

<pág. 45>



Com o teodolito, calculou o ângulo CÂB = 75º e C A = 60º. Utilize a Lei dos Senos para calcular a medida aproximada da ponte AC.

(Considere $\sqrt{2}$ =1,4 e $\sqrt{3}$ =1,7)

****

Multimídia

Que tal construirmos um Teodolito? Assim, poderemos entender melhor seu funcionamento, além de aprender mais sobre Trigonometria numa experiência bem divertida. Acesse o site e assista ao vídeo explicativo.

http://www.youtube.com/watch?v=jivQJZlbCBY

****

Outra importante relação da Trigonometria é a *Lei dos Cossenos*. Essa lei relaciona os três lados de um

triângulo e apenas um único ângulo.

Vamos tentar entender como ele funciona?

Se estivermos diante de um triângulo retângulo, poderemos utilizar o Teorema de Pitágoras para a relação entre os seus lados.

<pág. 46>

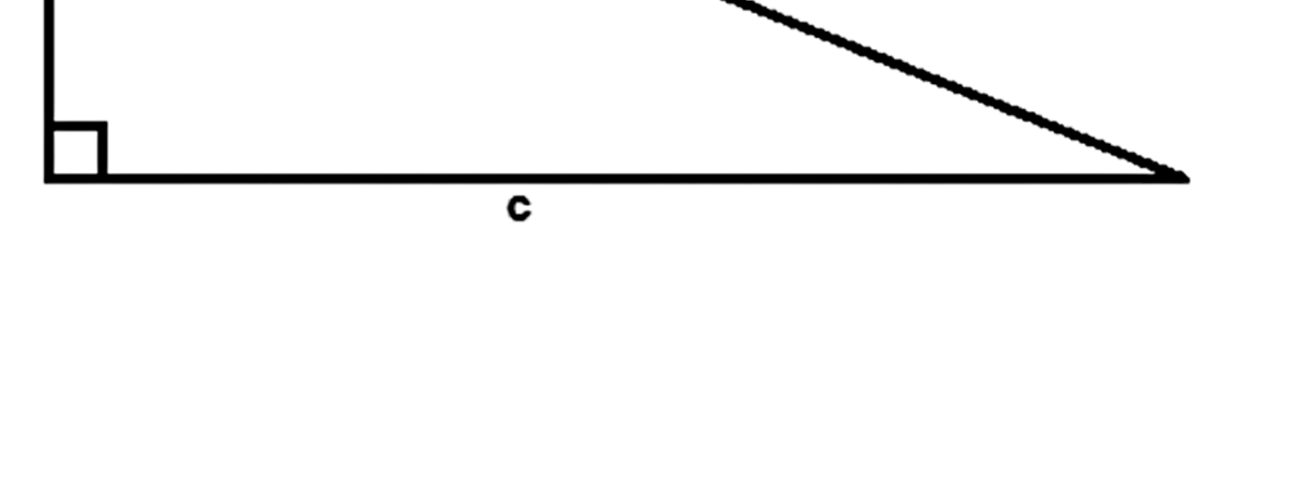


Figura 13: O triângulo retângulo, seus lados e o Teorema de Pitágoras

Porém, se o ângulo reto der lugar a um ângulo agudo, certamente a hipotenusa sofrerá uma redução e, a partir desse momento, o Teorema de Pitágoras não funcionará mais. Diante disso, precisaremos fazer uma pequena "correção" no Teorema de Pitágoras, ajustando-o para que possamos relacionar os lados corretamente.

Esse ajuste leva em consideração o ângulo que ficou no lugar do ângulo reto. Da seguinte forma:

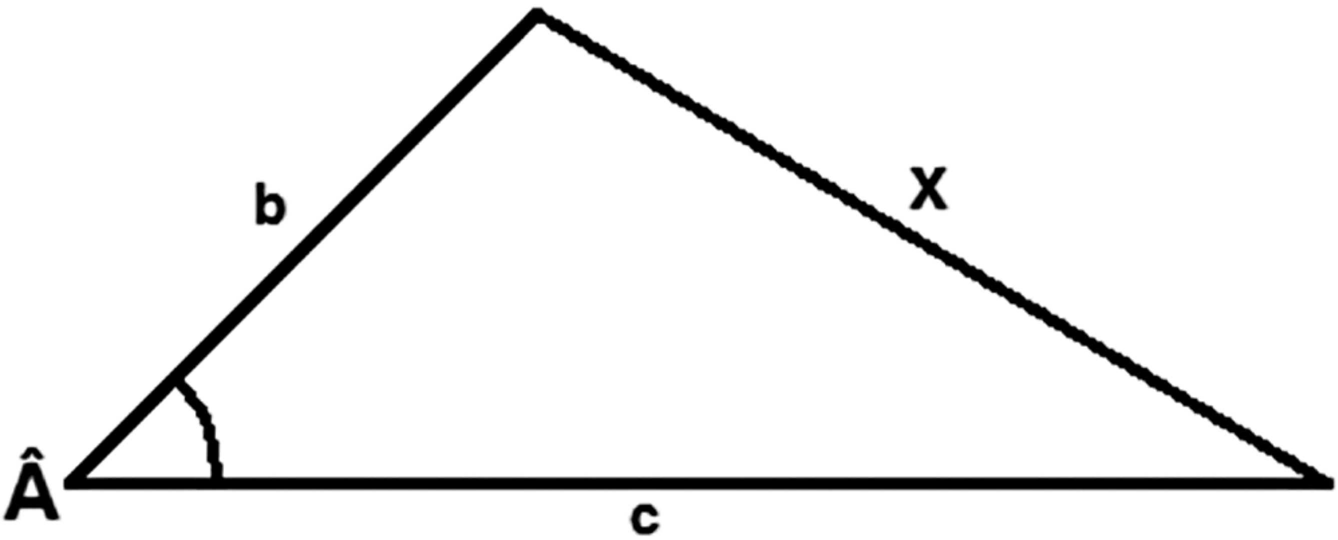


Figura 14: O ângulo reto foi reduzido a um ângulo agudo e o lado <u>a</u> também diminuiu de tamanho, tornando-se o lado x.

A relação que podemos criar entre os lados é:

$$x^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos´$$

Podemos notar que a expressão "- 2.b.c.cos´ " é o fator de correção que havíamos comentado anteriormente. Essa relação

recebe o nome de Lei dos Cossenos.

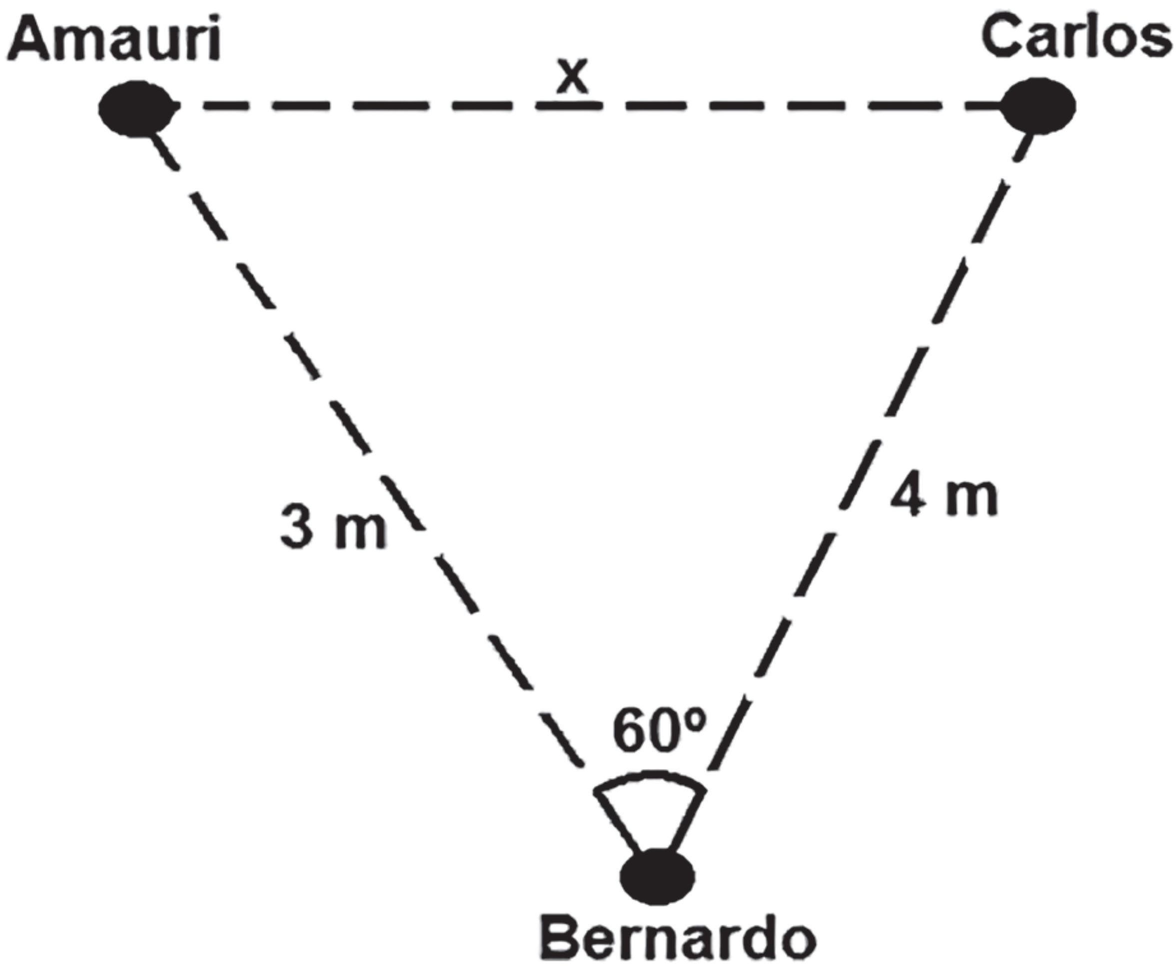
Multimídia

Você quer saber como fizemos para deduzir esta fórmula? Acesse o *link* a seguir para entender como chegamos a essa relação. Nele, você vai encontrar um vídeo com todo o passo a passo. Veja!
http://www.youtube.com/watch?v=3gUhDWlqOB8
****

<pág. 47>

Atividade 10

Três amigos estão sentados em um campo. Bernardo está a 3 metros de distância de Amauri e a 4 metros de distância de Carlos. Além disso, consegue observá-los sob um ângulo de 60º. (Observe a figura)



Como poderemos determinar a distância entre Amauri e Carlos?

Resumo...

Nesta aula, estudamos sobre as razões trigonométricas no triângulo retângulo. Estas são relações que são muito

importantes em todas as ações matemáticas que você vai vivenciar daqui por diante. Por isso, não deixe de realizar cuidadosamente todas as atividades que propusemos. Avalie com cuidado o seu aprendizado e, se necessário, busque auxílio.

.As razões trigonométricas seno, cosseno e tangente são formas de relacionar lados e ângulos de um triângulo retângulo.

.Os ângulos de 30º, 45º e 60º são os mais comuns e, por isso, procuramos sempre nos lembrar dos

seus respectivos valores de seno, cosseno e tangente. Esses valores estão nesta tabela:

<pág. 48>

	30º	45º	60º
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

. A Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos possibilitam relacionar lados e ângulos de um triângulo qualquer, isto é, sem a necessidade de

trabalharmos com triângulos retângulos.

. A Lei dos Senos é definida por

$$\frac{a}{\text{sen}\,\acute{}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}}$$

A Lei dos Cossenos é definida por: $x^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos'$.

Veja ainda

Para quem é curioso e gosta de conhecer aplicações diferentes dos assuntos que aprendemos nesta unidade, temos algumas sugestões que

podem enriquecer nosso aprendizado.

Os vídeos do Novo Telecurso são muito interessantes, pois trazem situações práticas e discutem inclusive a demonstração das fórmulas aqui apresentadas. Acesse os vídeos e saiba mais!

Trigonometria no triângulo retângulo:

.http://www.youtube.com/watch?v=nT2A4Ehf1kU

Lei dos Senos

.http://www.youtube.com/watch?v=-rSvHD1DYXo

Lei dos Cossenos

.http://www.youtube.com/watch?v=v5_CXEI4TLs&feature=plcp

Referências

.IMENES, L.M., TROTTA, F., JAKUBOVIC, J. Matemática Aplicada – 2º grau, Ed. Moderna.

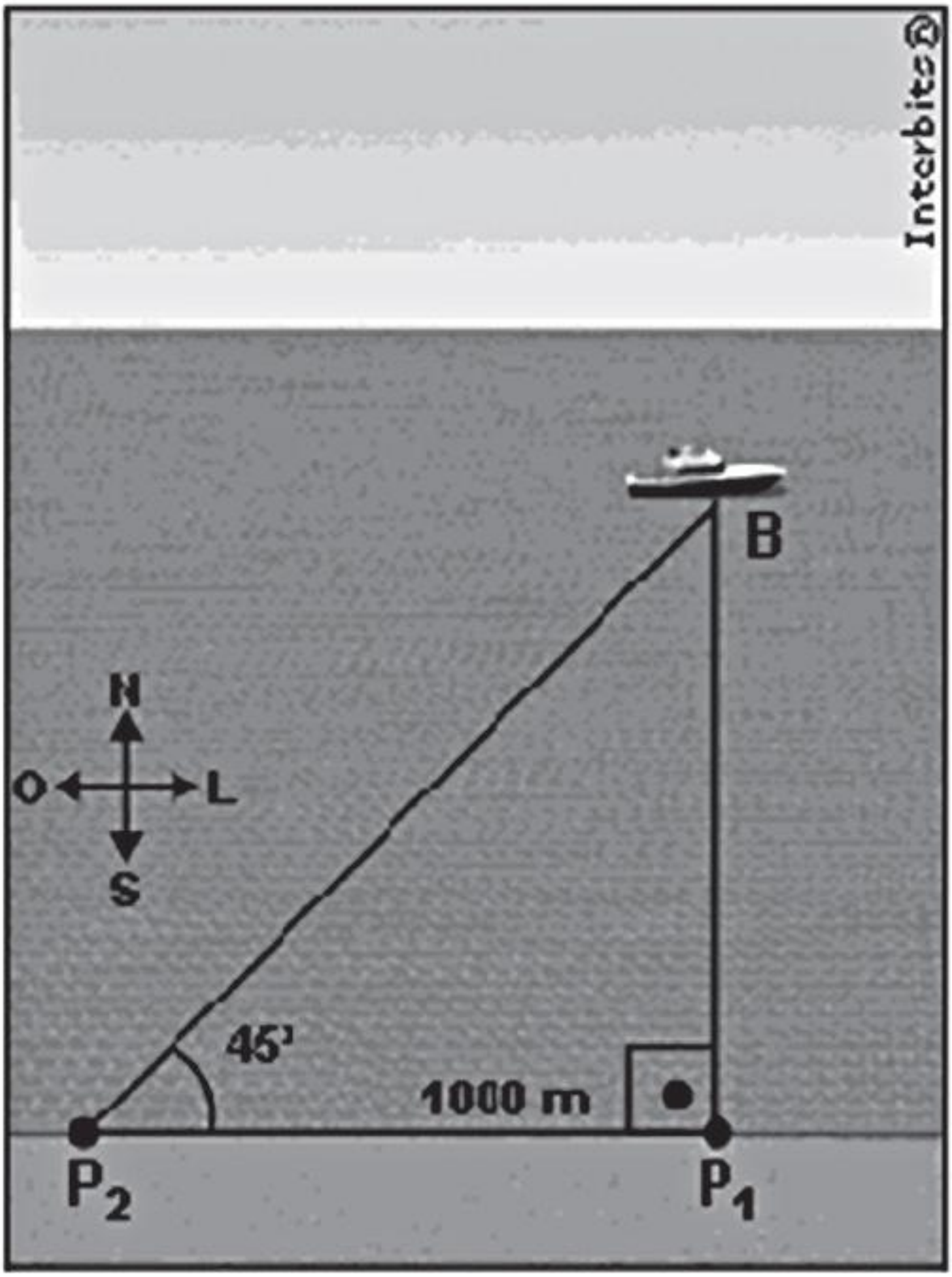
.LOBO DA COSTA, N.M. Funções Seno e Cosseno*:* Uma Sequência de Ensino a Partir dos Contextos do Mundo Experimental.e do Computador. Dissertação de Mestrado, PUC/SP, 1997.

<pág.51>

O que perguntam por ai?

(Uel – 2011)

Um indivíduo em férias na praia observa, a partir da posição P_1, um barco ancorado no horizonte norte na posição B. Nesta posição P_1, o ângulo de visão do barco, em relação à praia, é de 90º, como mostrado na figura a seguir.



Ele corre aproximadamente 1000 metros na direção oeste e observa novamente o barco

a partir da posição P_2. Neste novo ponto de observação P_2, o ângulo de visão do barco, em relação à praia, é de 45º.

Qual a distância P_2B, aproximadamente?

a) 1000 metros
b) 1014 metros
c) 1414 metros
d) 1714 metros
e) 2414 metros

Resposta: Letra B

Comentários: A distância P_2B é a hipotenusa do triângulo. Com isso, usando cos 45º, temos que a medida P2B vale 1000√ 2.

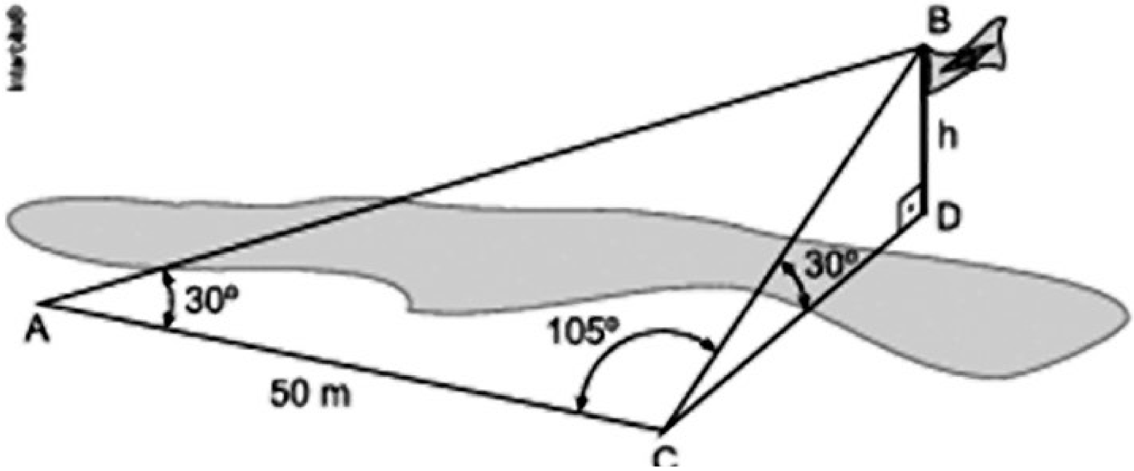
Como $\sqrt{2} \cong 1,414$, temos que $1000\sqrt{2} = 1414$ metros.

<pág. 52>

Unesp – 2011

Uma pessoa se encontra no ponto A de uma planície, às margens de um rio e vê, do outro lado do rio, o topo de uma bandeira, ponto B. Com o objetivo de determinar a altura h do mastro, ela anda, em linha reta, 50 m para a direita do ponto em que se encontrava e marca o ponto C. Sendo D o pé do mastro, avalia que os ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{C}D$ valem

30º, e o AĈD vale 105º, como mostra a figura:



a) 12,5.

b) 12,5 √2.

c) 25,0.

d) 25,0 √2.

e) 35,0.

Resposta: Letra B

Comentário: O ângulo AB̂C vale 45º, pois a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo e sempre igual a 180º. Utilizando a

Lei dos Senos, conseguimos calcular a medida do segmento BC que é igual a 2√5 2 m. Como h é o cateto oposto ao ângulo de 30º e BC é a hipotenusa, usamos o seno de 30º para calcularmos h. Com isso, encontramos 12, 5 √2 m.

<pág. 53>

Respostas das atividades

Atividade 1

Todos são triângulos <u>retângulos</u>, pois possuem um ângulo de 90º. Além disso, em todos há um ângulo de 30º.

O lado oposto ao ângulo de 30º mede <u>1 metro</u>. Já o lado adjacente a este mesmo ângulo mede <u>0,87 m</u>. Não confunda com o lado oposto ao ângulo de 90º que mede <u>2 metros</u>.

Agora, calcule a razão (quociente) entre a medida do lado oposto ao ângulo de 30º e o oposto ao ângulo de 90º.

$$\frac{\text{lado oposto ao ângulo de } 30°}{\text{lado oposto ao ângulo de } 90°} = \frac{1}{2}$$

O lado oposto ao ângulo de 30º mede <u>80 cm</u>. Já o

lado adjacente a este mesmo ângulo mede 138,6 cm. Não confunda com o lado oposto ao ângulo de 90º que mede 160 cm.

Agora, calcule a razão (quociente) entre a medida do lado oposto ao ângulo de 30º e o oposto ao ângulo de 90º.

$$\frac{\text{lado oposto ao ângulo de } 30^\circ}{\text{lado oposto ao ângulo de } 90^\circ} = \frac{80}{160} = \frac{1}{2}$$

Atividade 2

Segundo a figura do problema, a trajetória retilínea do avião faz um ângulo de 30º com a horizontal. Sendo assim, formamos um triângulo retângulo, formado pela trajetória, a altura do avião e a horizontal com este ângulo de 30º.

Dessa forma, a trajetória de 2 quilômetros representa a hipotenusa deste triângulo e a altura funciona como cateto oposto ao ângulo de 30º. Portanto, podemos usar o seno do ângulo de 30º para calcular essa altura.

Logo,

$$\text{sen}30^{o} = \frac{h}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{h}{2}$$

h= 1km ou 1000 metros

Atividade 3

Neste problema, o triângulo formado pela escada, a parede e o chão possui como hipotenusa comprimento da escada (8 metros). O ângulo solicitado pelo problema encontra-se na parte

<pág. 54>

superior do triângulo, isto é, o ângulo formado pela escada e a parede. Tome cuidado para não calcular o ângulo formado pela escada e o chão que se encontra na parte inferior do triângulo.

Como a escada encosta na parede em um ponto a 4 metros de altura, esta medida representará o cateto adjacente ao ângulo requisitado. Então se temos a hipotenusa e o cateto adjacente, poderemos trabalhar com o Cosseno.

Com isso,

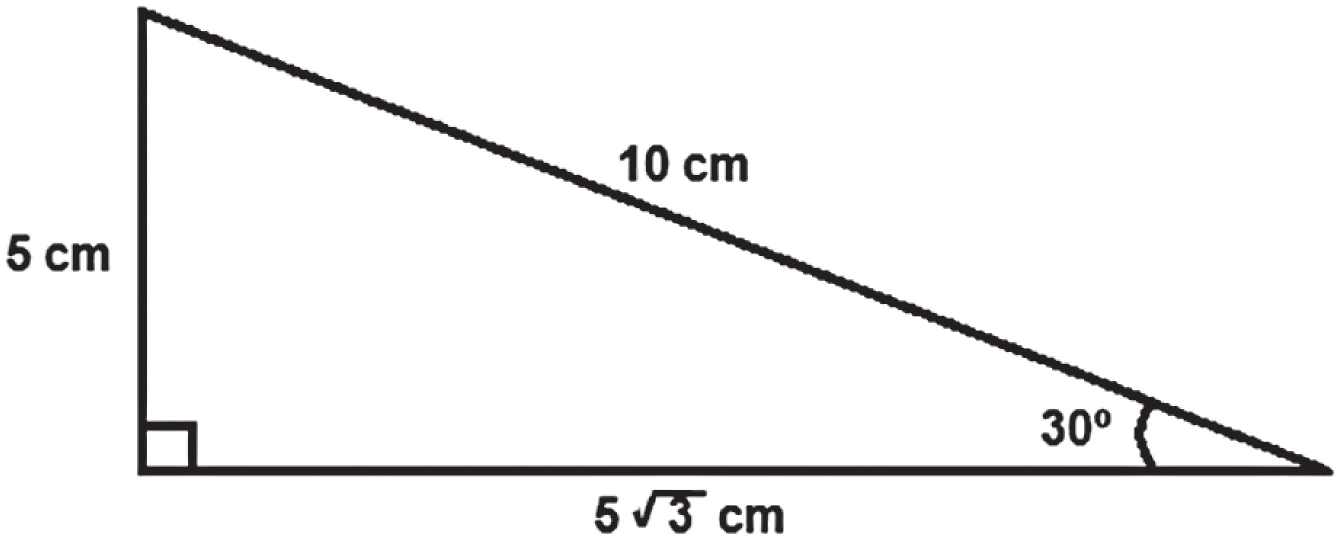
$$\cos X = \frac{\text{altura do muro}}{\text{comprimento da escada}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Percebemos, portanto, que o cosseno do ângulo X vale ½. Imediatamente, vamos consultar nossa tabela para verificar qual ângulo possui este valor para o seu cosseno. E este ângulo é o de 60º.

Tome outro cuidado, o seno de 30º também vale

½. Mas, não confunda! Estamos trabalhando com o Cosseno.

Atividade 4



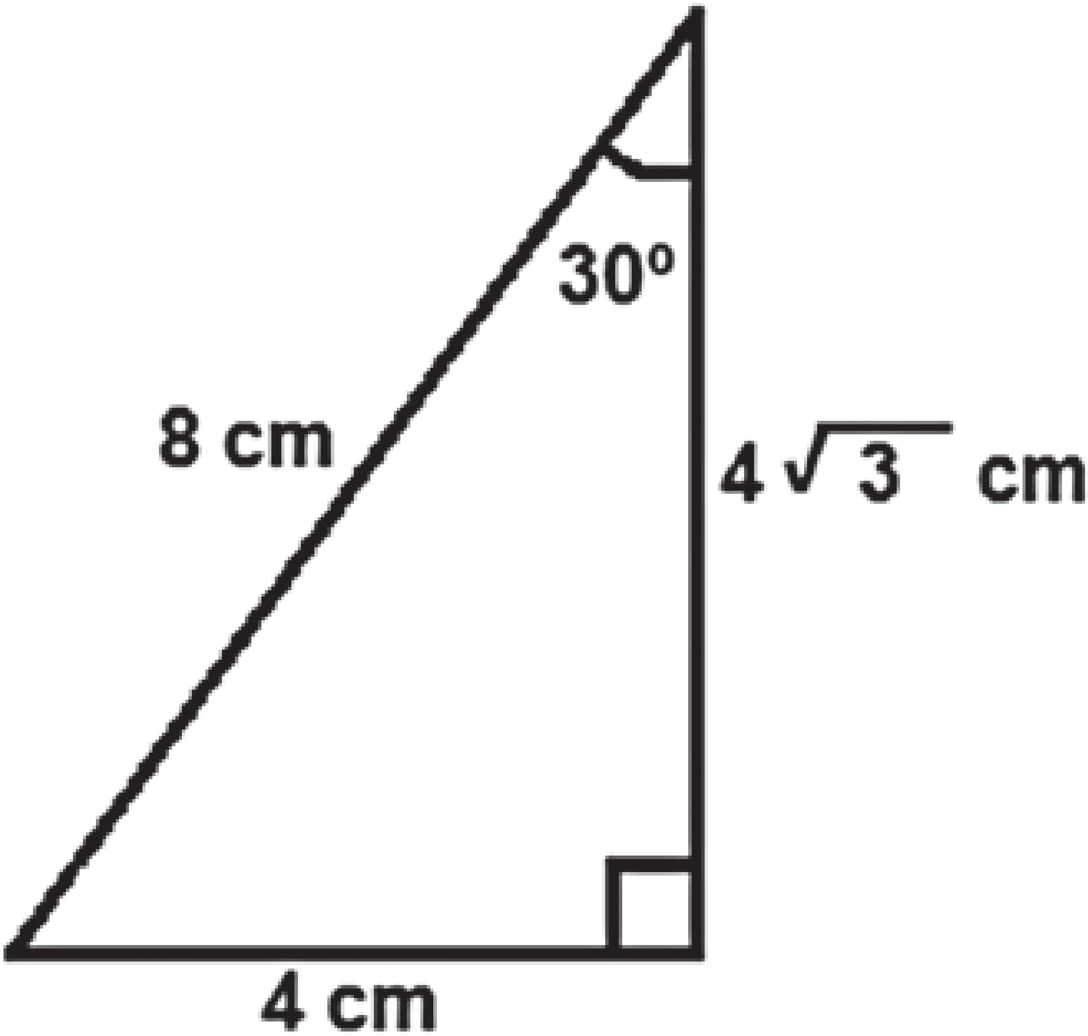
.Nesta figura, o cateto oposto ao ângulo de 30º mede ____5cm____. O cateto adjacente a este ângulo mede _5√3 cm______ e a hipotenusa mede __10 cm_____.

.A razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa pode ser representada através da fração $\frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

.A razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo de 30º pode ser representado através da fração $\frac{5}{5\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(racionalizando o denominador).

b.



<pág. 55>

.Nesta figura, o cateto oposto ao ângulo de 30º mede ___4 cm___. O cateto adjacente a este ângulo

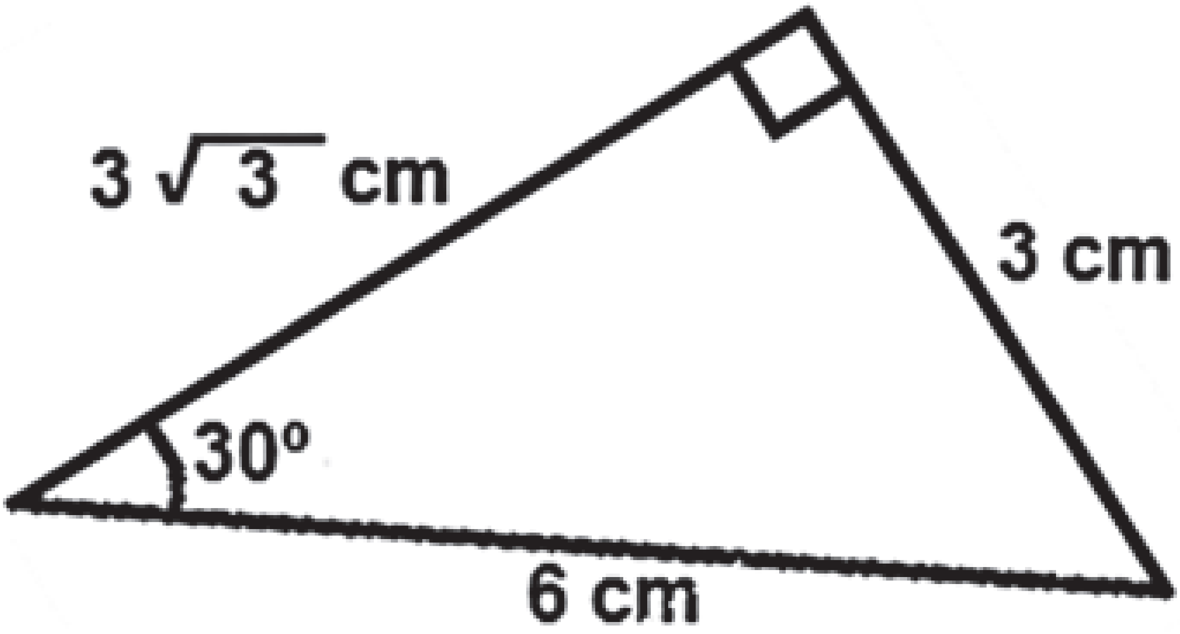
mede ___ $4\sqrt{3}$ cm ___ e a hipotenusa mede _ 8cm _.

.A razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa pode ser representada através da fração $\frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

.A razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo de 30º pode ser representado através da fração $\frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(racionalizando o denominador).

c.



.Nesta figura, o cateto oposto ao ângulo de 30º mede ____3 cm____. O cateto adjacente a este ângulo mede ___3√3 cm______ e a hipotenusa mede __6 cm__.

.A razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa

pode ser representada através da fração $\frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

.A razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo de 30º pode ser representado através da fração $\frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (racionalizando o denominador).

Atividade 5

Seno de x = 3/5

Seno de y = 4/5

Cosseno de x = 4/5

Cosseno de y = 3/5

Tangente de x = 3/4

Tangente de y = 4/3

Atividade 6

O triângulo formado pela situação descrita no problema nos mostra um ângulo de 45º, onde a altura da pessoa representa o cateto oposto e a projeção da sombra o cateto

adjacente a este ângulo. Dessa forma, a tangente, razão trigonométrica que relaciona estes dois lados

do triângulo é a mais indicada para solucionar este problema.

Com isso,

$$tg45^{o} = \frac{\text{altura da pessoa}}{\text{sombra}} = \frac{2}{x}$$

$$1 = \frac{2}{x}$$

$$x = 2 \text{ metros}$$

Atividade 7

Quando falamos em altura do obelisco, entendemos que é uma medida que faz 90º com o solo. Portanto, um triângulo

retângulo com um ângulo de 60º. A altura é o cateto oposto ao ângulo de 60º e a distância de 50 m representa o cateto adjacente ao mesmo ângulo.

Logo, utilizaremos a tangente de 60º para resolver esse problema.

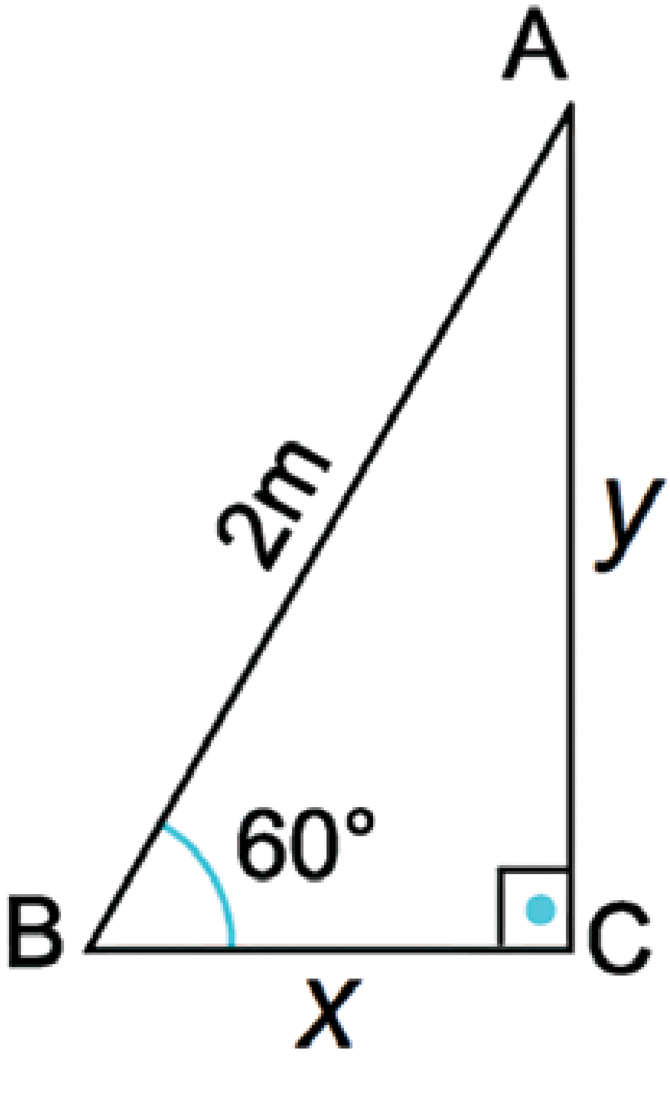
$$tg60^o = \frac{\text{altura do obelisco}}{\text{distância da pessoa}} = \frac{x}{50}$$

$$\sqrt{3} = \frac{x}{50}$$

$x = 50\sqrt{3}$ metros de altura

Se você utilizar a calculadora, verá que esse valor é aproximadamente 86,6 metros de altura.

Atividade 8



Segundo esta figura, o lado x é o cateto adjacente e o lado y é cateto oposto ao ângulo de 60º. Já o lado AB, que mede 2 metros, é a hipotenusa deste triângulo.

<pág. 57>

Logo, para encontrar o valor de x, iremos utilizar a razão cosseno.

$$\cos 60^\circ = \frac{x}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{2}$$

$$x = 1$$

Para calcularmos o valor de y, iremos utilizar a razão seno.

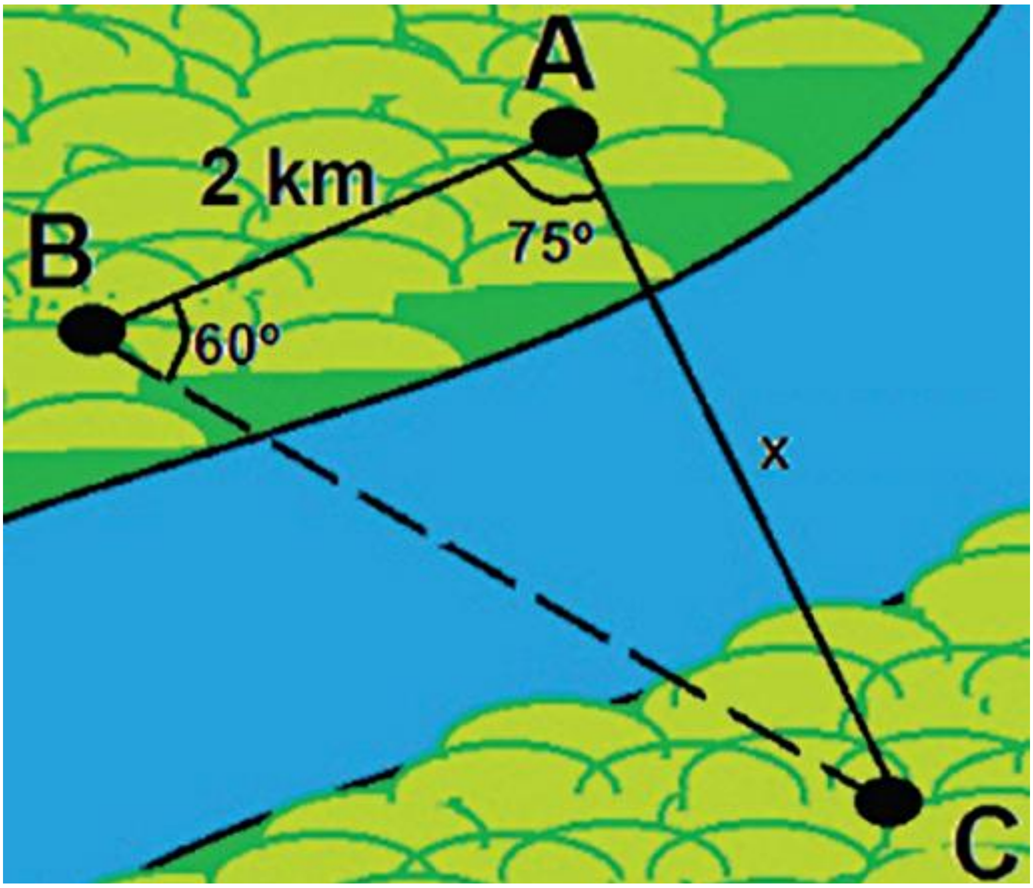
$$\text{sen}60^{o} = \frac{y}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{2}$$

$$y = \sqrt{3}$$

Atividade 9

Neste problema, a situação pode ser descrita pela seguinte figura:



Notamos que há dois lados e os seus respectivos ângulos opostos. Essas informações são necessárias e suficientes para utilizarmos a Lei dos Senos. Vamos ver como fica:

$$\frac{x}{\text{sen}60^\circ} = \frac{2}{\text{sen}45^\circ}$$

$$\frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{2.\ 1{,}7}{1{,}4} = \frac{3{,}4}{1{,}4}$$

$$\cong\ 2{,}43 \text{ km}$$

<pág. 58>

Atividade 10

Neste problema, devemos estar atentos para os dados que são fornecidos: dois lados e o ângulo formado

por eles. Essas informações permitem-nos utilizar a Lei dos Cossenos para encontrarmos a distância entre Amauri e Carlos. Vamos lá:

A distância entre eles será chamada de

$x^2 = 3^2 + 4^2 - 2 . 3 . 4 \cos 30^o$

$x^2 = 9 + 16 - 24 \frac{1}{2}$

$x^2 = 25 - 12$

$x^2 = 13$

$x = \sqrt{13}$**metros 3,60 m**

Atenção: Lembre-se de que devemos efetuar as multiplicações antes das adições e subtrações.

Unidade 20

Trigonometria na circunferência

Para início de conversa

<pág. 59>

CENTRAL DO BRASIL: na segunda-feira da semana passada, dois funcionários da CBTU trabalhavam para limpar a

marca de Vinga, o pichador mais procurado

Figura 1: Reportagem do jornal O Globo da década de 1990 mostra o relógio da Central do Brasil, no Rio de Janeiro, sendo limpo por dois funcionários da CBTU (Companhia Brasileira de Trens Urbanos), devido a um ato de vandalismo que se difundia cada vez mais pela cidade: a pichação.

Sem dúvida, você já deve ter visto várias pichações nos mais diversos lugares. No início da década de 90, a moda era destacar-se dos demais pichadores pela

ousadia, pichando em locais cada vez mais altos e arriscados. Hoje em dia, ainda há pichações, porém num movimento cada vez mais fraco. Mas a ousadia de pichar o relógio da Central do Brasil assusta bastante. Simplesmente, porque é muito alto!

<pág. 60>

Você sabe quantos metros de altura tem esse relógio?

São 110 metros de altura do nível da rua até o relógio que foi fabricado em 1943. Possui quatro faces quadradas de 10

metros de lado e ocupa exatamente cinco andares do prédio, do 22º ao 26º andar.

Realmente, é muita coragem!

E você? Teria coragem de subir até o relógio da Central para realizar o mesmo trabalho que os dois funcionários da foto realizaram?

Um dos funcionários presentes nesta foto está pisando a base do relógio, isto é, está a 110 metros de altura. Agora, observe na foto que o outro funcionário está agarrado

no ponteiro das horas. Será que tem ideia da altura que se encontra? Como podemos calcular a que altura ele se encontra? Será que depende da posição do ponteiro no qual se segura?

Fique tranquilo. Estaremos juntos nesta unidade para discutir de que forma podemos determinar algumas distâncias dentro de um círculo. Para isso, tomaremos por base a Trigonometria que aprendemos na unidade anterior.

Objetivos de Aprendizagem

.Reconhecer a existência de fenômenos que se repetem de forma periódica;

.Identificar o radiano como unidade de medida de arco;

.Transformar a medida de um arco de grau para radiano e vice-versa;

.Representar o seno, o cosseno de um arco qualquer no ciclo trigonométrico;

.Resolver equações trigonométricas simples, com soluções na primeira volta.

Seção 1

Calculando distâncias na circunferência

Na unidade passada, aprendemos a calcular o comprimento de alguns segmentos, principalmente em triângulos, levando-se em consideração alguns ângulos. Isto é, usamos a Trigonometria para efetuar tais cálculos.

Será que podemos fazer uso novamente da Trigonometria para determinarmos distâncias em uma circunferência?

Vamos analisar a situação que nosso amigo, funcionário da CBTU, está passando. Para facilitar um pouco nossa análise, vamos considerar que ele está sobre o número 3 do relógio, conforme a figura.

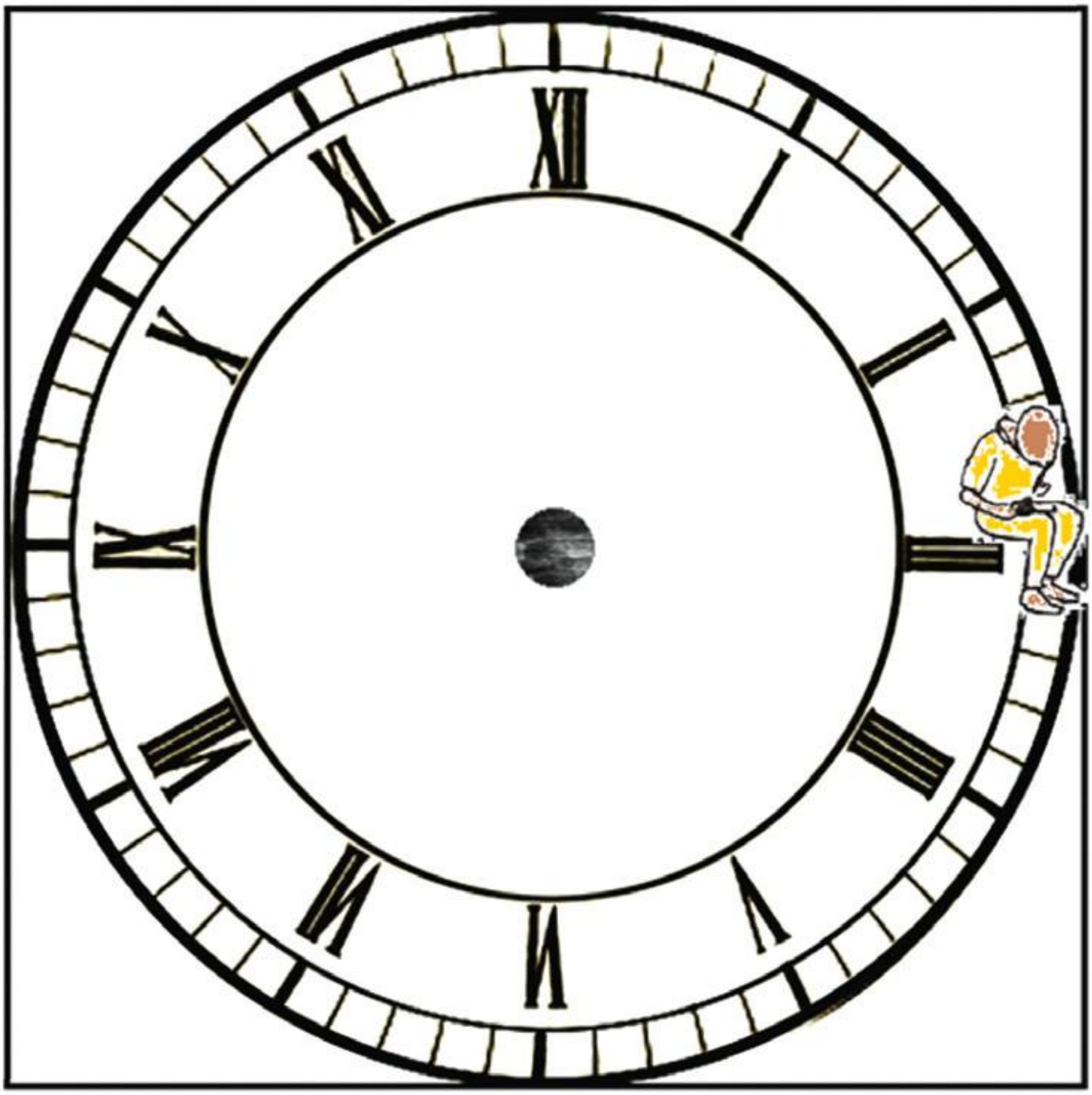


Figura 2: Representação do relógio da Central do Brasil com o funcionário da CBTU sentado junto ao número 3. Que tal darmos um pseudônimo ao nosso

amigo? O que acham de João?

Vamos lembrar que esse relógio tem a forma de um quadrado com 10 metros de lado. Sendo assim, Sr. João está a uma altura que corresponde à metade da medida do lado do relógio, isto é, a 5 metros de altura. Contudo, não se esqueça de que o relógio encontra-se a 110 metros de altura do chão. Logo, Sr. João está a 115 metros de altitude. Essa foi fácil, não foi?!

Antes de prosseguir, uma pequena atividade:

Atividade 1

Sr. João também estaria a uma altura de 115 metros de tivesse sentado em um outro número do relógio. Que número é esse?

Agora, vejamos outra situação: digamos que Sr. João esteja sentado sobre o número 2. Observe, então, a figura a seguir:

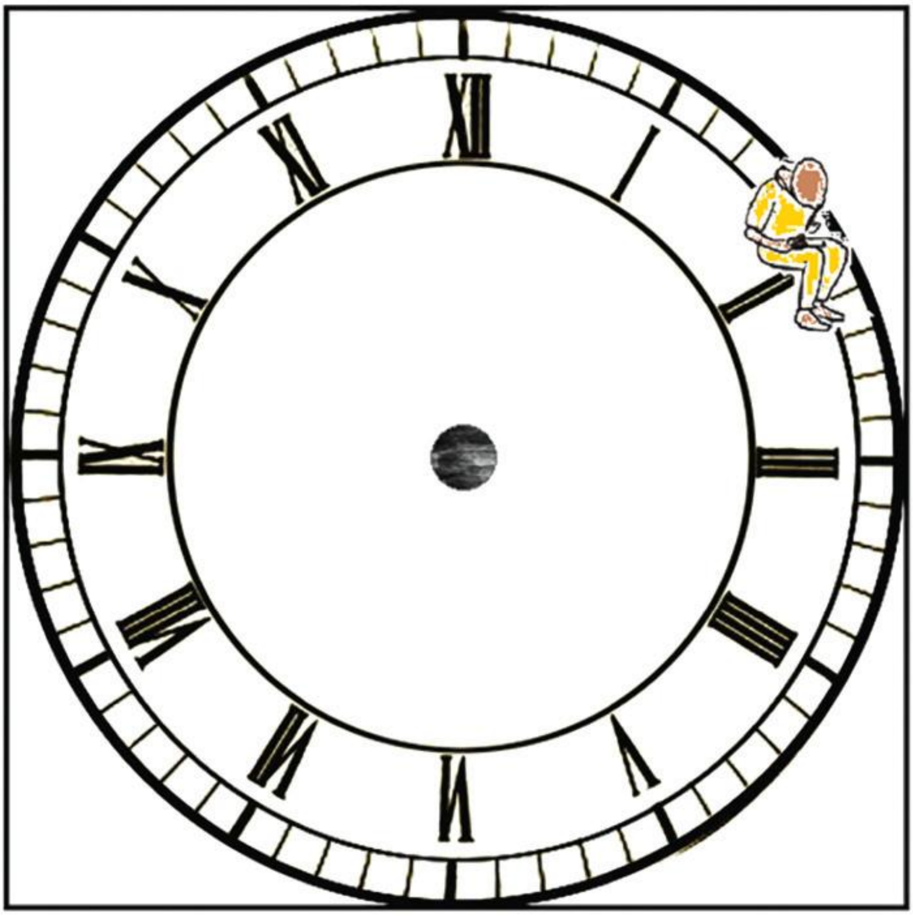


Figura 3: Sr. João está um pouco mais alto. Agora, está no número 2. Como poderemos calcular o quanto que o Sr. João subiu? Quer uma dica? Use a Trigonometria!

Ora, ora.... Como a Trigonometria vai nos ajudar a resolver este caso?

Vamos investigar!

Lembremos que toda volta completa em uma circunferência possui 360º (360 graus). Como em um relógio há 12 números igualmente separados ao longo da circunferência, podemos garantir que existe um ângulo de $360º \div 12 = 30º$ entre dois números. Isto é, Sr. João percorreu um arco de 30º, ao sair do número 3 e ir para o número 2.

Observe a figura a seguir. Nela, colocamos o ângulo de 30º entre os números 2 e 3. Perceba que a altura até o número 3 já foi calculada anteriormente. O que falta apenas é uma pequena distância que vamos chamá-la de x.

<pág. 63>

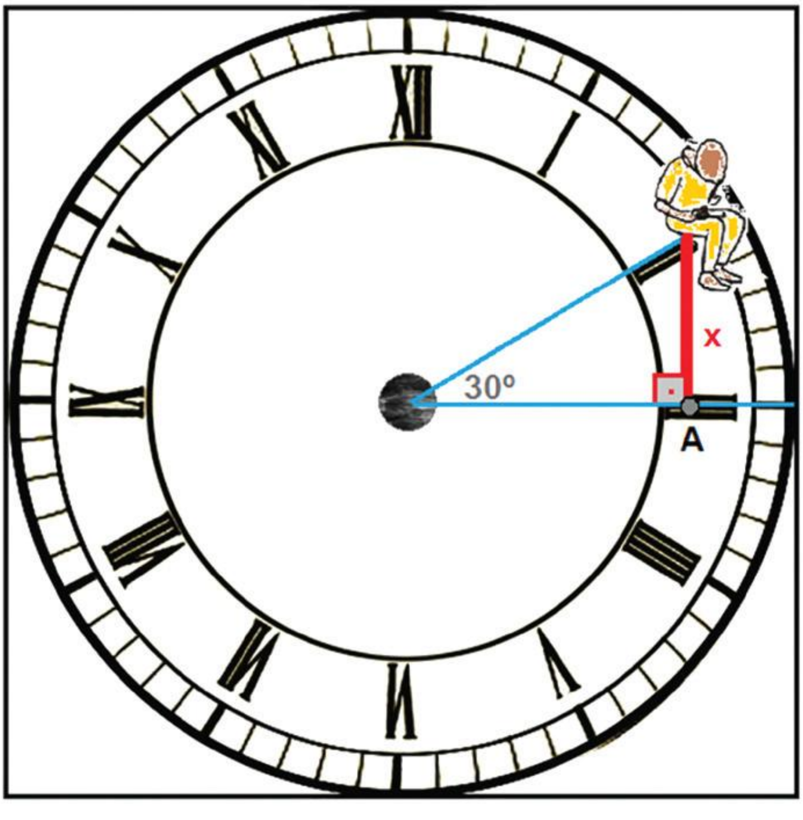
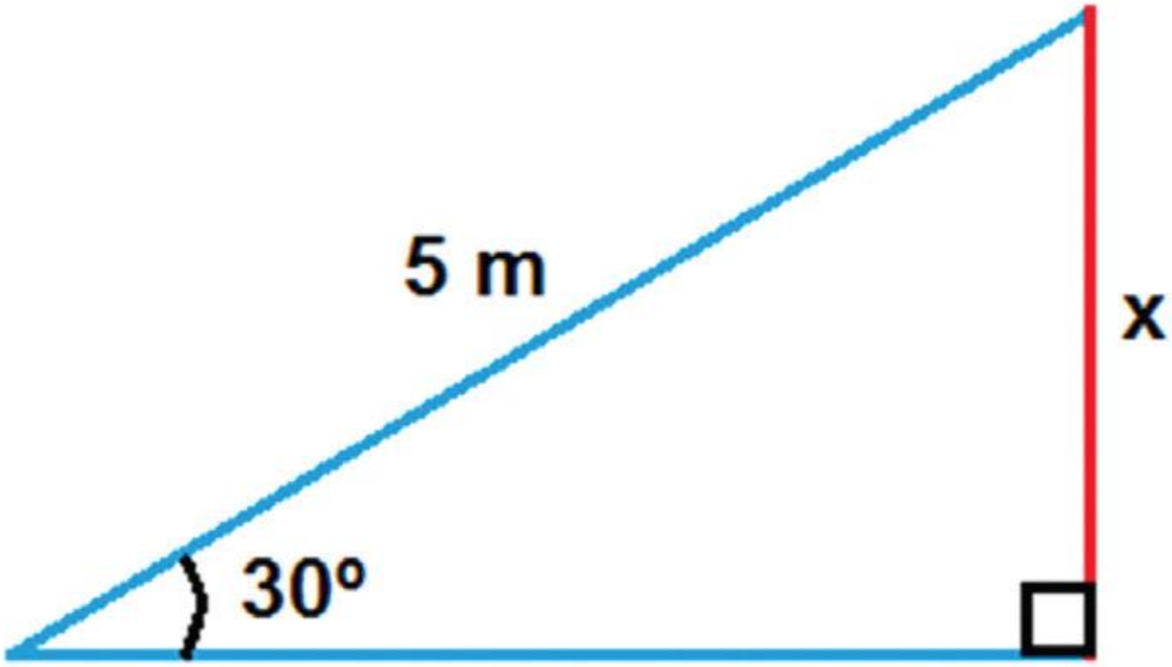


Figura 4: A distância x representa o quanto Sr.

João deslocou-se verticalmente, quando estava no número 3. Repare que o centro do relógio, Sr. João e o ponto A formam um triângulo retângulo. Percebeu onde entra a Trigonometria?

Note bem este triângulo formado na figura. Conhecemos a medida do segmento que une o centro do relógio e o Sr. João: ele é o raio da circunferência do relógio, ou seja, tem 5 metros de comprimento.

Dessa forma, o triângulo fica assim:



Como vimos na unidade anterior, calculamos x através do seno de 30º.

Observe:

$$\text{Sem } 30^{\circ} = \frac{x}{5}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{5}$$

x = 2,5 metros

Concluímos, portanto, que a altura do Sr. João sentado sobre o número 2 do relógio da Central do Brasil é de: 110m + 5m + 2,5m = 117,5 metros.

Vamos ver se estamos entendendo bem?

<pág. 64>

Atividade 2

Existe um outro número no qual seu Sr. João pode se sentar e manter a mesma altura de 117,5m. Marque a opção correta:

a. IV

b. VIII

c. IX

d. X

Atividade 3

Complete as lacunas:

Caso Sr. João queira ficar na mesma altura do número 5, basta se posicionar sobre o número __________.

Os números que estão a 30º do número 12 são _____________ e ___________. Com isso, podemos dizer que possuem alturas _________________ (iguais / diferentes).

Sr. João quer ficar na maior altura possível. Para isso, terá de se sentar sobre o número ________________. A altura neste número é de ______________ metros. Já o número ___________ está na posição mais baixa, isto é, a _________ metros de altura.

****

Se considerarmos que Sr. João está agarrado ao ponteiro do relógio, percebemos que sua altura varia de acordo com a posição deste ponteiro. Sempre entre a máxima e a mínima que já calculamos. De tempos em tempos, as

alturas repetem-se. A isso, damos o nome de *fenômeno periódico*.

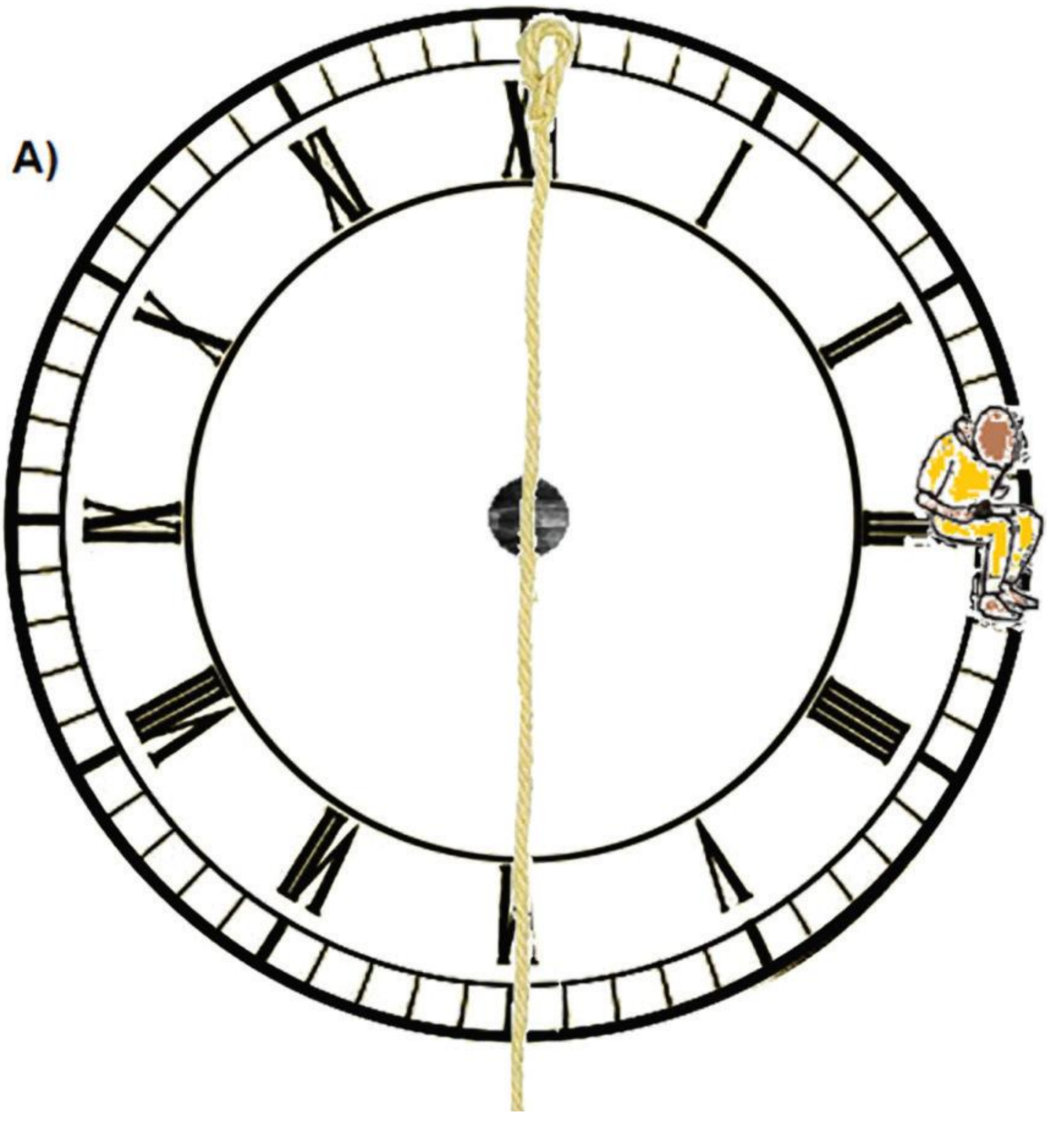
Sendo assim, conseguimos esclarecer quanto à altura em que Sr. João encontra-se. Para isso, utilizamos a Trigonometria. Esperamos, então, que nosso amigo convença-se de que está a uma altura muito grande e que desça o quanto antes desse relógio!

<pág. 65>

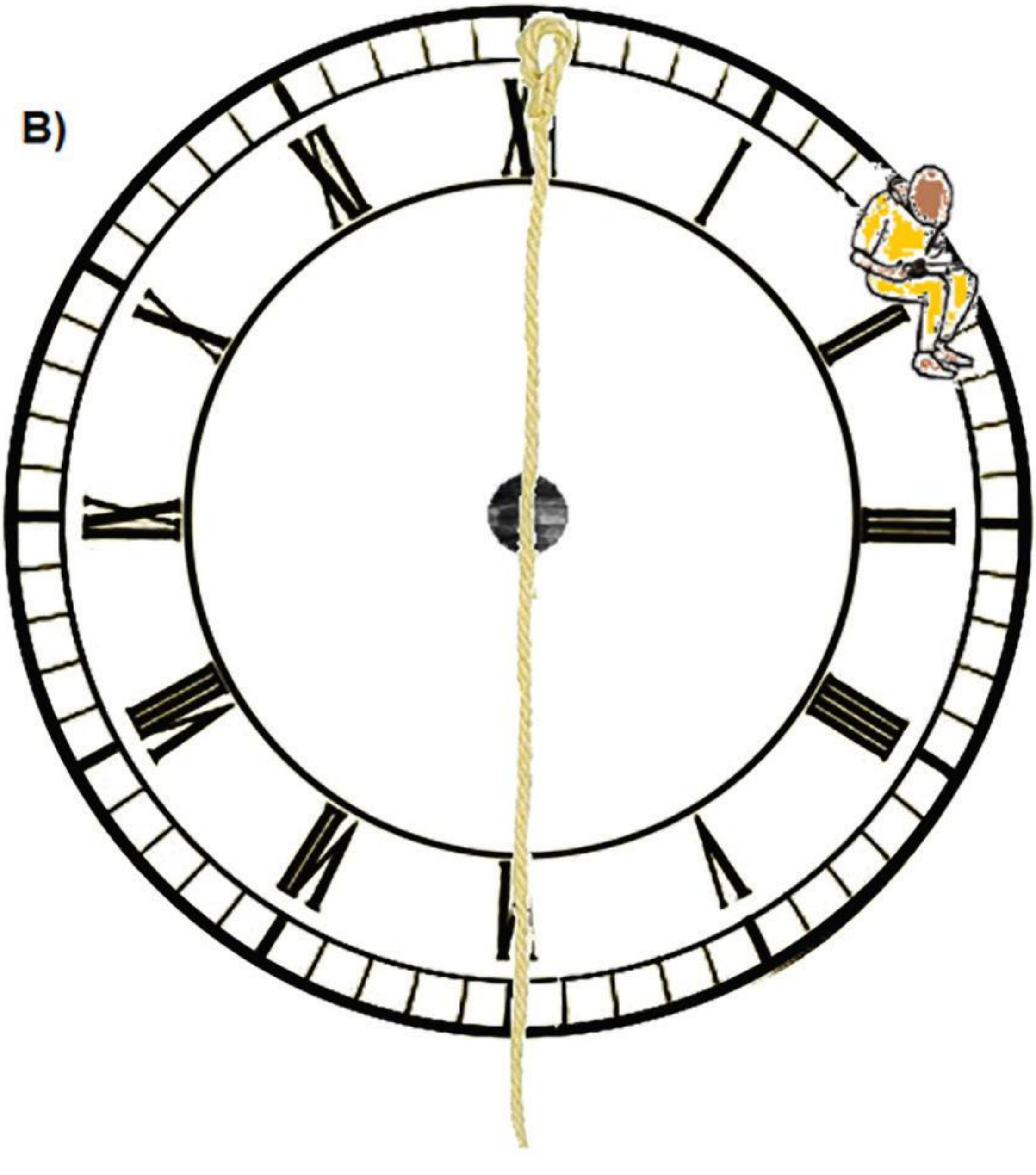
Falando em descer, vamos pendurar uma corda

no número 12 que leva até a base do relógio. Nossa tarefa agora é determinar a distância de cada número à corda pendurada. Vamos ver a figura a seguir para responder à próxima atividade:

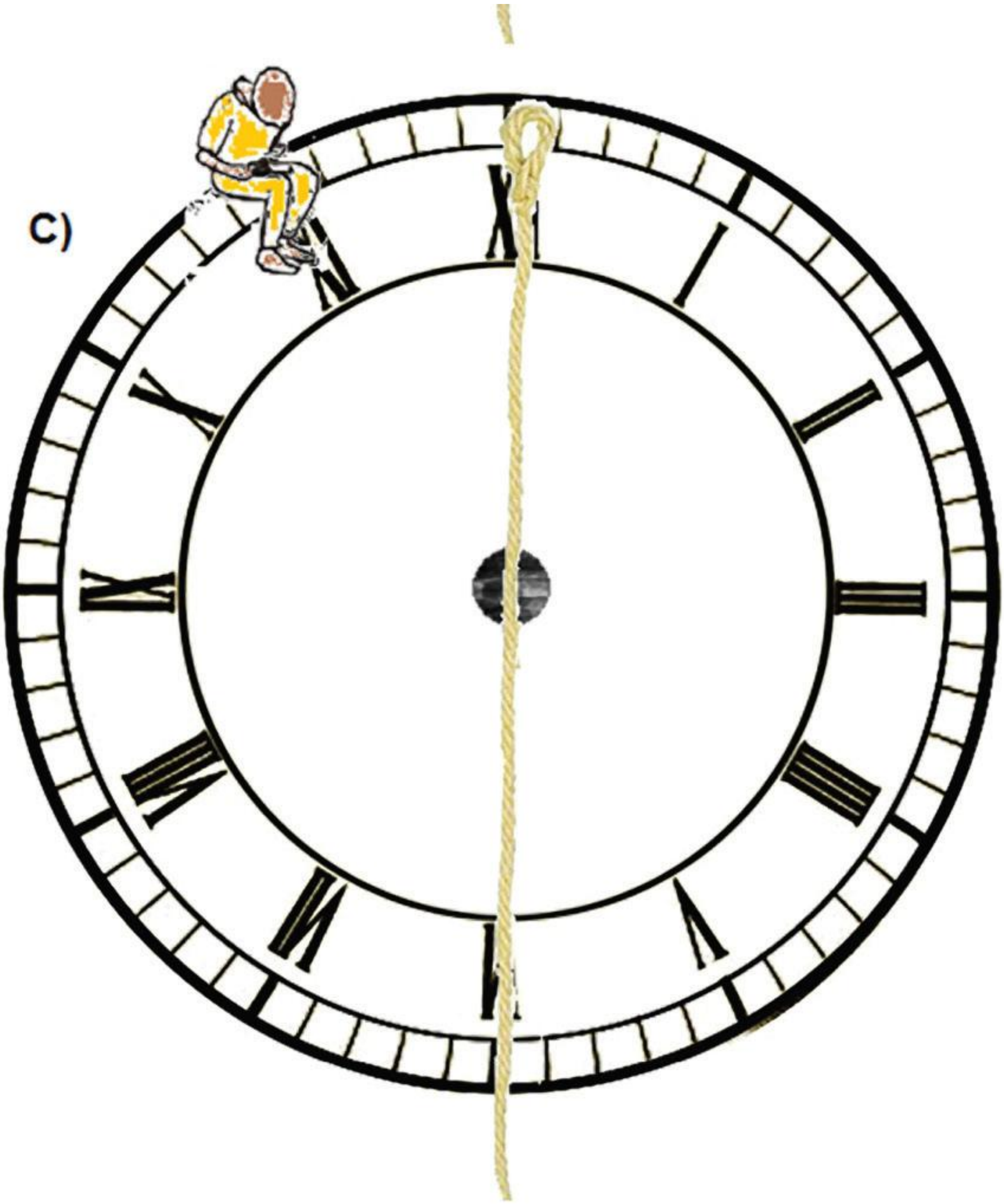
A)



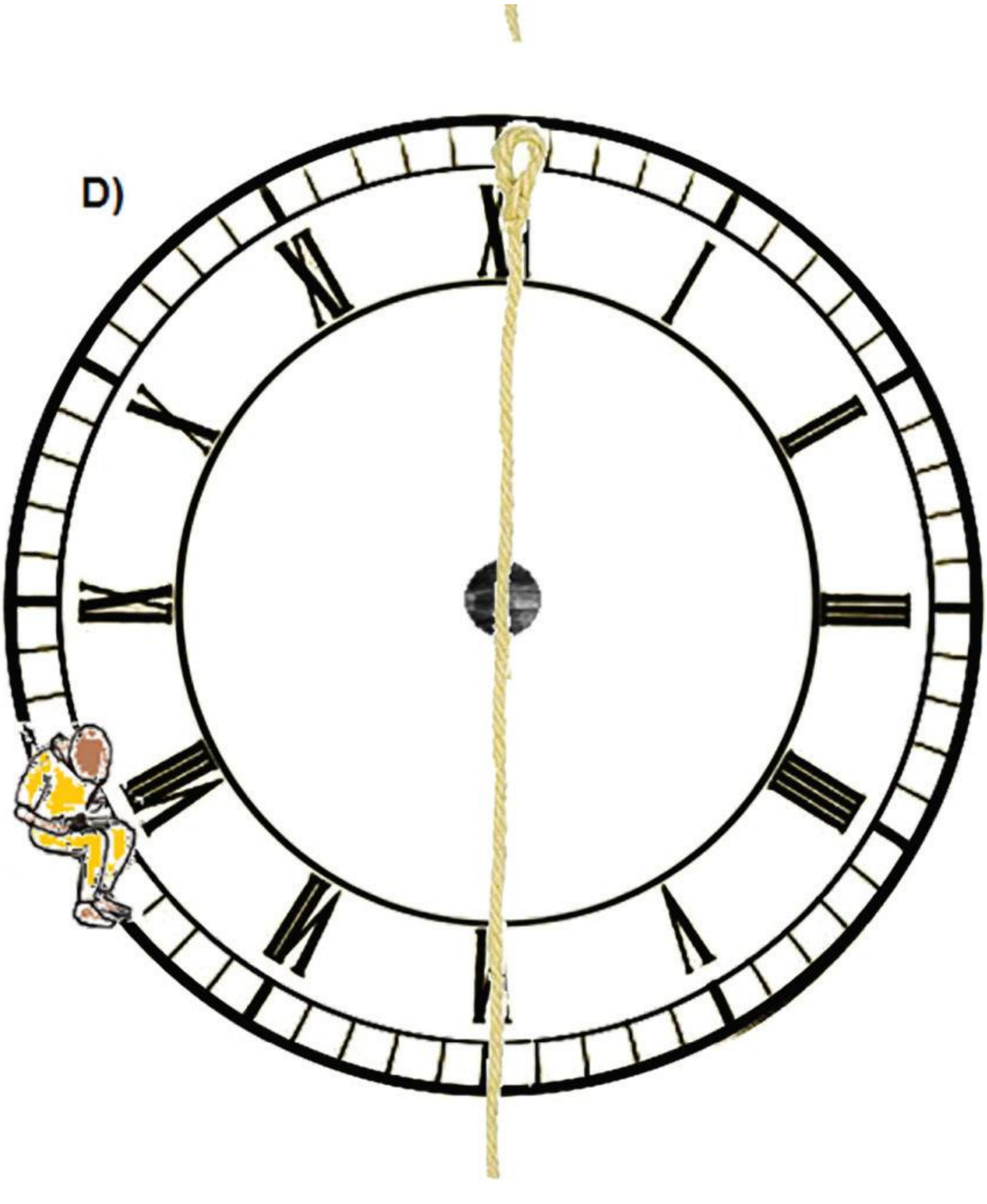
B)



C)



D)



<pág. 66>

Atividade 4

Responda às perguntas:

a. Em qual das opções, Sr. João está mais próximo da corda?

b. Qual a distância de Sr. João à corda na opção (A)? (Não se esqueça de que o raio deste relógio é de 5 metros).

c. Em duas situações, Sr. João está a uma mesma distância da corda. Quais são elas?

******

Muito bem!

Conseguimos responder à

atividade sem precisar de cálculos (Veja na seção Resposta das atividades no final desta aula). Mas, como poderemos definir as distâncias do Sr. João à corda nas figuras B, C e D? Vamos analisar juntos?

Para calcularmos a distância de Sr. João à corda na situação descrita na letra B, temos de recapitular algumas informações sobre o relógio:

Sua circunferência tem raio igual a 5 metros e o arco determinado por dois números consecutivos

possui 30º (trinta graus). Com isso, traçamos o raio do relógio (segmento que parte do centro do relógio até Sr. João) e a distância do nosso amigo até a corda. Vamos observar a figura a seguir. Ela ilustra tudo isso.

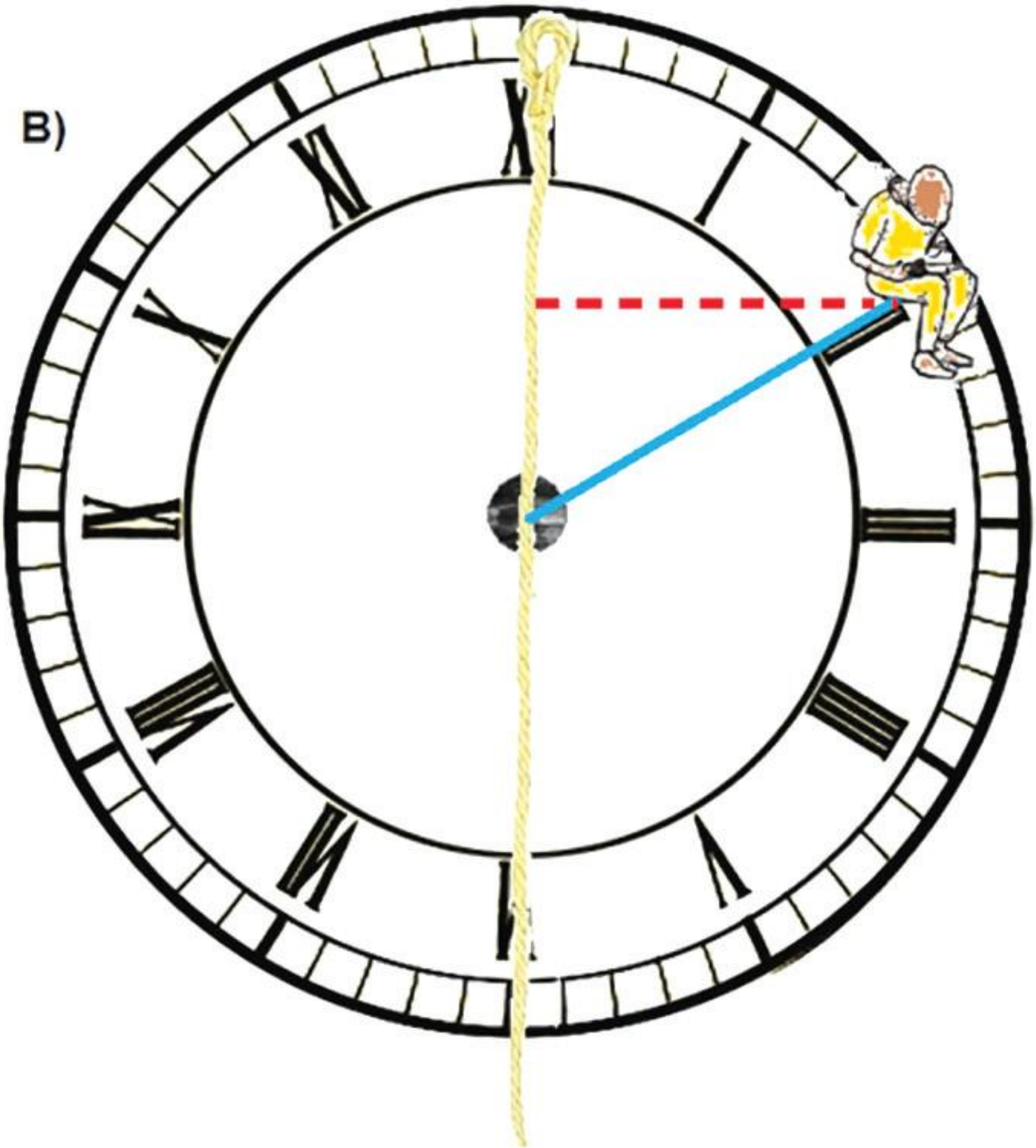


Figura 5: Esta figura mostra Sr. João sobre o número 2, o raio do relógio (em azul) e a distância dele à corda (em vermelho

pontilhado). Repare que, neste desenho, não aparece um dado importante: o ângulo de 30º. Lembre-se de que isto é muito importante para resolvermos este problema através da Trigonometria.

<pág. 67>

Vamos colocar o ângulo de 30º, nesta figura. Para isso, vamos colocar um eixo horizontal (em cinza) que passa pelo centro do relógio. Note que o segmento vermelho pode ser projetado sobre este eixo horizontal (para esta

projeção, fizemos uso de um eixo vertical em preto). Dessa forma, construímos um triângulo retângulo que contém um ângulo de 30º, um lado (a hipotenusa) medindo 5 metros e a distância que queremos calcular. Podemos chamar essa distância de y. Vejamos a figura para entender tudo isso.

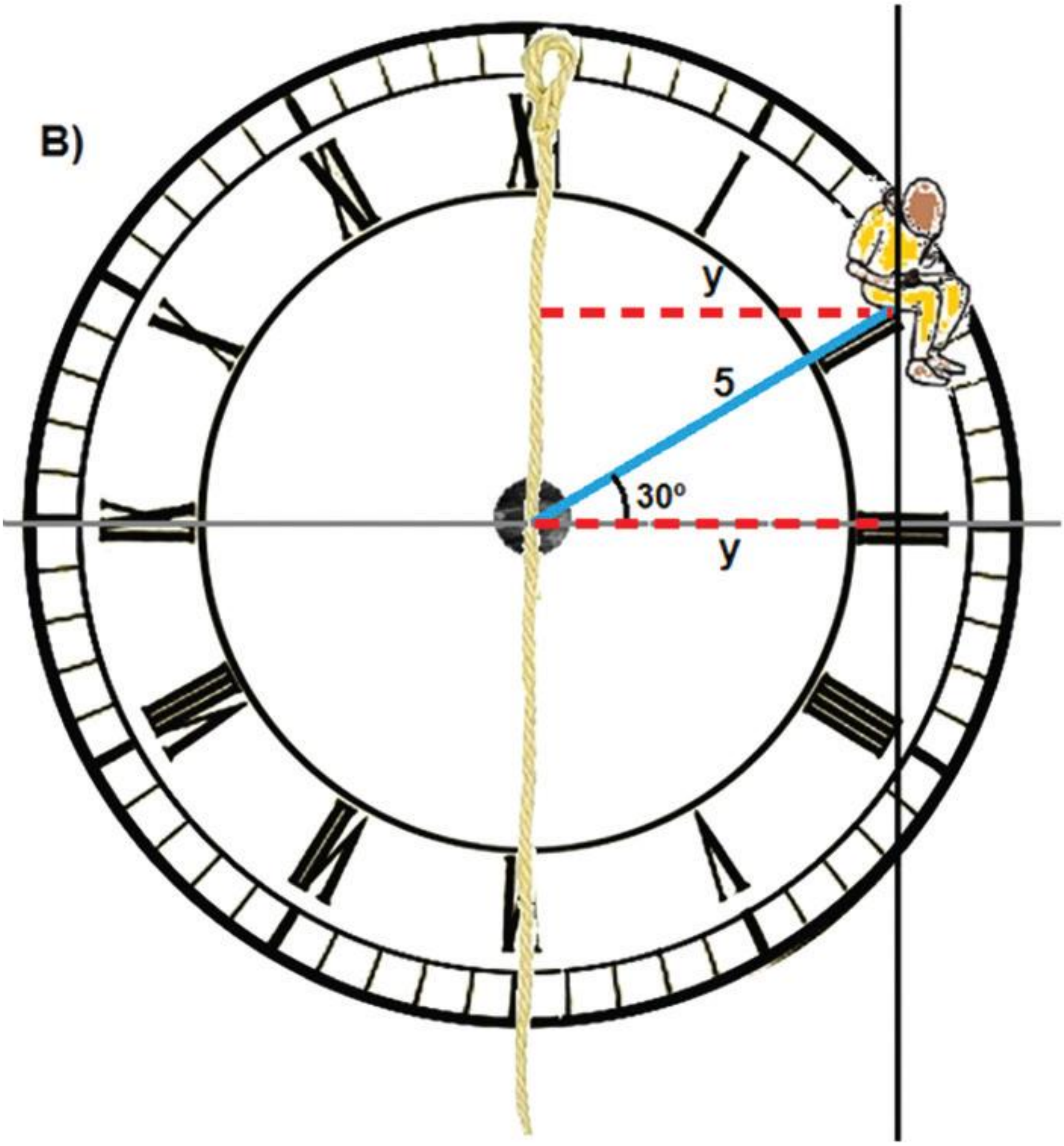
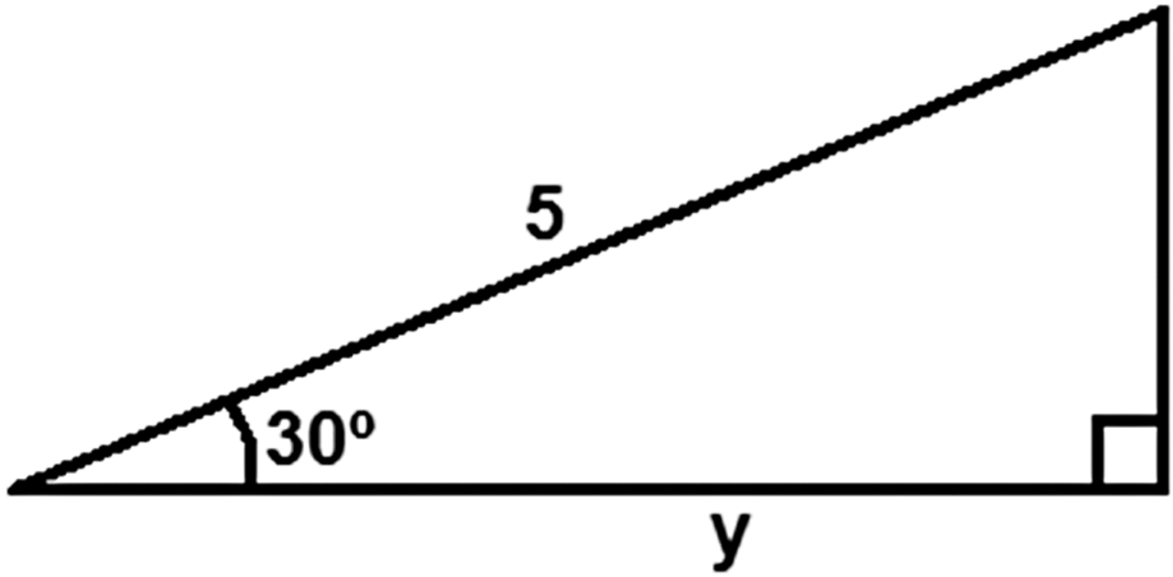


Figura 6: Com o raio de 5 metros em azul, a projeção da distância y em vermelho e o eixo vertical, formamos um triângulo retângulo que contém um ângulo de 30º.

Com isso, temos que y representa um cateto adjacente a este ângulo e o raio, a hipotenusa.

Observem a figura a seguir que mostra apenas o triângulo que nos ajudará a resolver este problema:

Utilizando nossos conhecimentos de Trigonometria no triângulo retângulo que discutimos na unidade anterior, vemos que y é o cateto adjacente ao ângulo de 30º e 5 é a hipotenusa do triângulo.



Logo, faremos uso do cosseno do ângulo de 30º para determinarmos a medida do segmento y.

$$\cos 30^{o} = \frac{\text{catetoadjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{5}$$

<pág. 68>

Como $\cos 30° = \sqrt{3}$, temos que:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{5}$$

$$y = \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{5 \,.\, 1{,}7}{2}$$

Para calcularmos as distâncias do Sr. João à corda nos demais casos, vamos utilizar uma linha de raciocínio similar. Quer tentar?

Atividade 5

Calcule as distâncias de Sr. João à corda nos casos das letras C e D.

****

Atividade 6

Complete as lacunas e verifique o que aprendemos:

Em todos os exercícios que fizemos, para calcularmos as distâncias verticais, sempre utilizamos a razão trigonométrica __________________ (seno / cosseno / tangente). Em todos esses exercícios, calculamos as distâncias horizontais sempre através

do ________________ (seno / cosseno / tangente).

Aprendemos nesses exercícios que a distância de Sr. João até a corda depende da _____________________ em que se encontra no relógio. Desta posição, sempre conseguimos determinar um ______________________ com o eixo horizontal que por sua vez passa pelo centro do relógio e pelos números _______ e _______.

Trabalhamos em todos os casos com este eixo horizontal. Ele é muito importante para o

conhecimento que estamos desenvolvendo nesta unidade.

****

Pessoal, após essa parte inicial desta unidade, verificamos que através da Trigonometria nos triângulos retângulos, podemos calcular distâncias em uma circunferência. Para isso, faremos algumas substituições: no lugar do relógio da Central do Brasil, colocaremos apenas uma circunferência de *raio igual a 1*. No lugar da corda, um eixo vertical.

Manteremos em nossos desenhos o eixo horizontal.

Seção 2

Organizando os conceitos trabalhados

Observem na figura a seguir a circunferência de raio unitário, os eixos horizontal e vertical, e um pontinho A. Este pontinho A vai ser nosso principal referencial, um ponto de partida, um marco inicial, tal qual o número 3 do relógio da Central do Brasil.

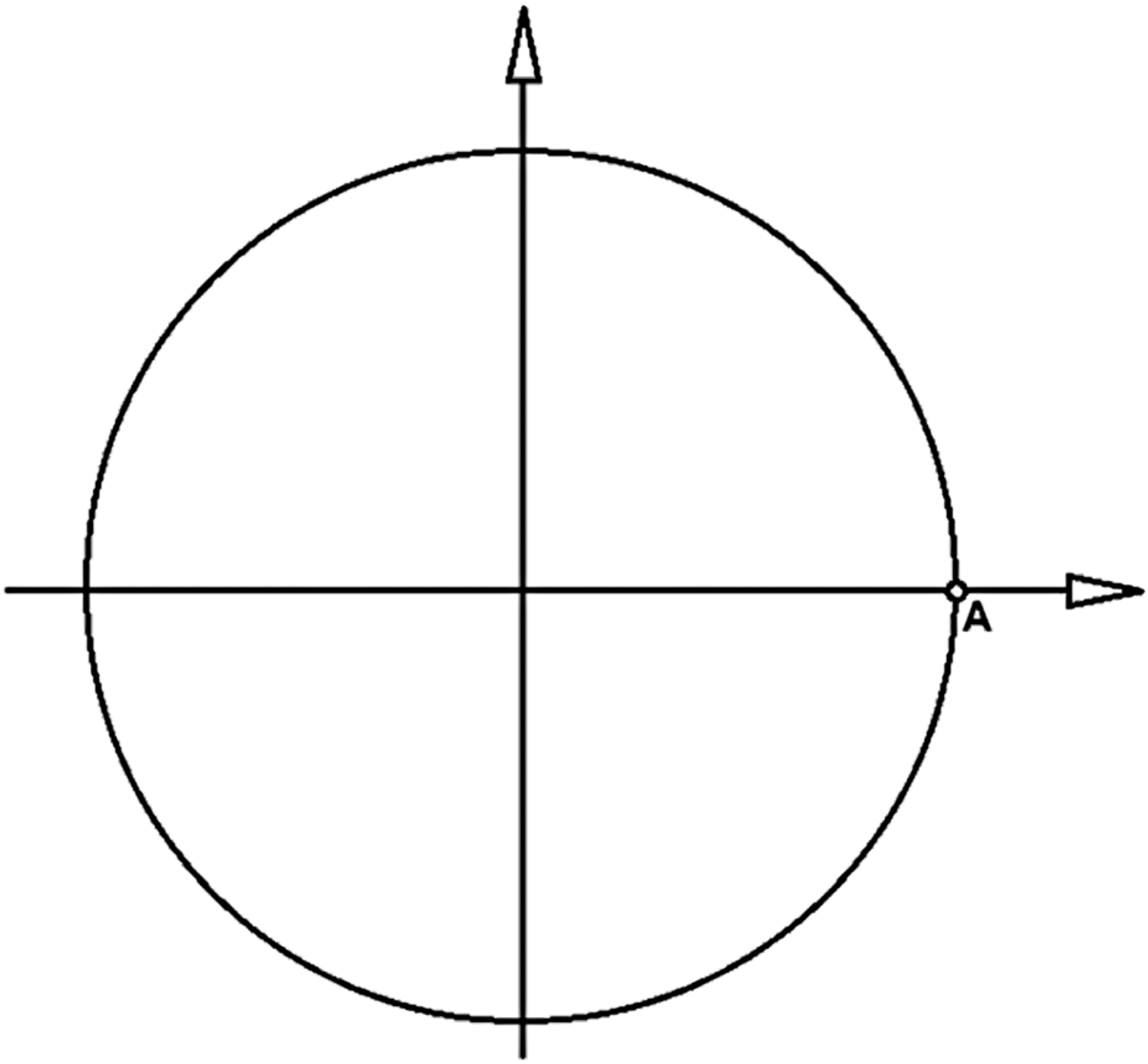


Figura 5: A circunferência acima possui raio unitário. O ponto A é o ponto de partida. Como se fosse o número 3 do relógio da Central do Brasil. Este ponto vai nos auxiliar a marcar os ângulos nesta circunferência, tal como

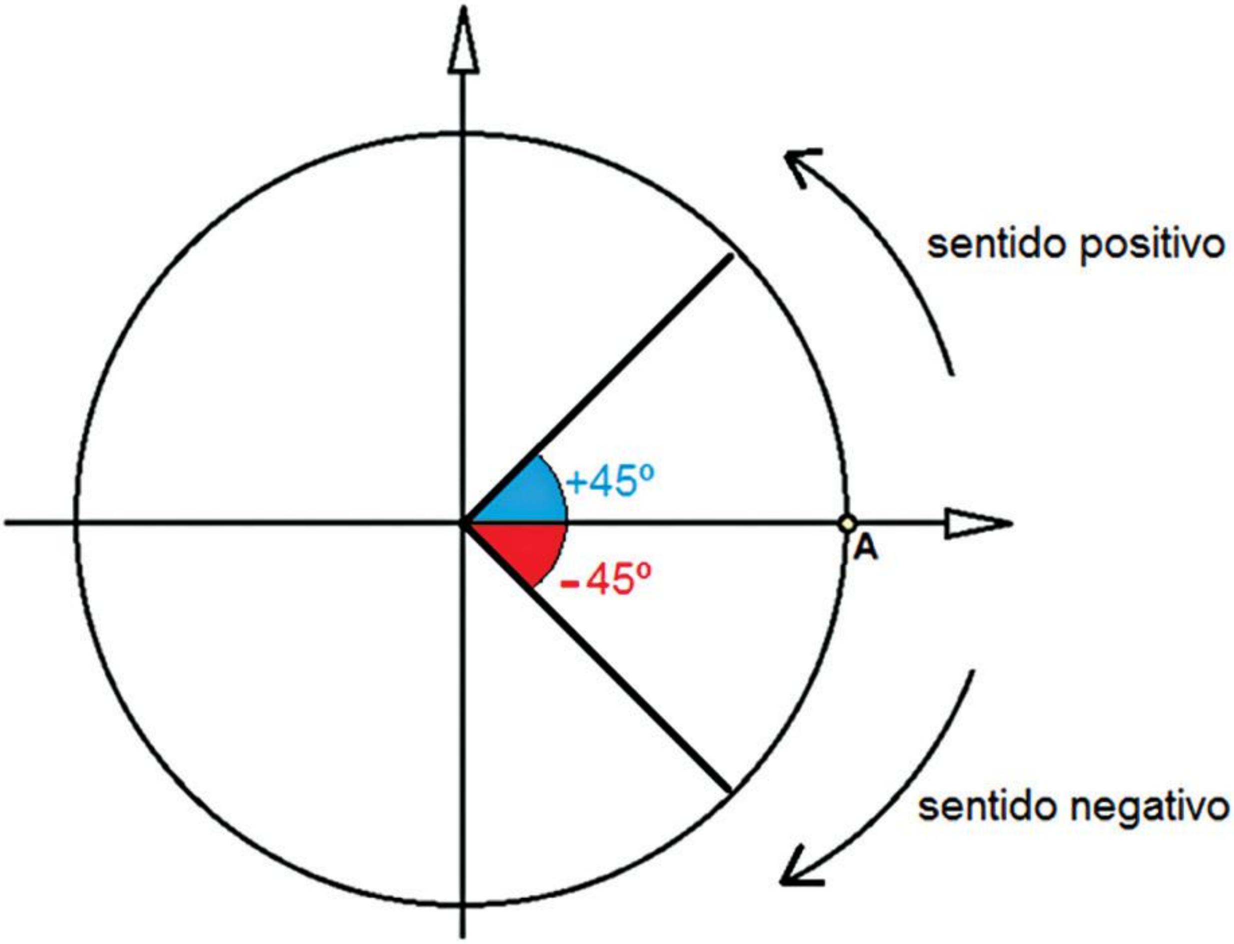
fizemos no caso do Sr. João.

A estrutura que construímos na figura acima recebe um nome especial, devido à sua importância no desenvolvimento deste assunto. Seu nome é *Círculo Trigonométrico*. Vamos conhecê-lo melhor?

No círculo trigonométrico, podemos construir ângulos, conforme pudemos verificar ao longo desta unidade. Porém, não podemos nos esquecer de ter como ponto de partida

o ponto A. Se percorremos a circunferência no sentido anti-horário (sentido contrário dos ponteiros do relógio), estaremos construindo ângulos positivos. Se percorremos no sentido horário, estaremos construindo ângulos negativos. Deem uma olhada no exemplo abaixo, em que percorremos dois arcos de medida igual a 45º.

<pág. 70>



(Texto na parte superior da imagem: sentido positivo + 45º

Texto na parte inferior da imagem: sentido negativo 45º)

Figura 6: Círculo trigonométrico, contendo a marcação de dois ângulos de 45º. Contudo, um deles está no sentido negativo e o outro no positivo. Mas, você já se perguntou o porquê dos dois eixos na figura? Qual a função deles mesmo?

A presença dos eixos perpendiculares no círculo trigonométrico permite-nos calcular algumas distâncias, tal qual fizemos no relógio da Central. Como discutimos em uma atividade anterior, para calcularmos distâncias horizontais no círculo, fazemos uso do cosseno.

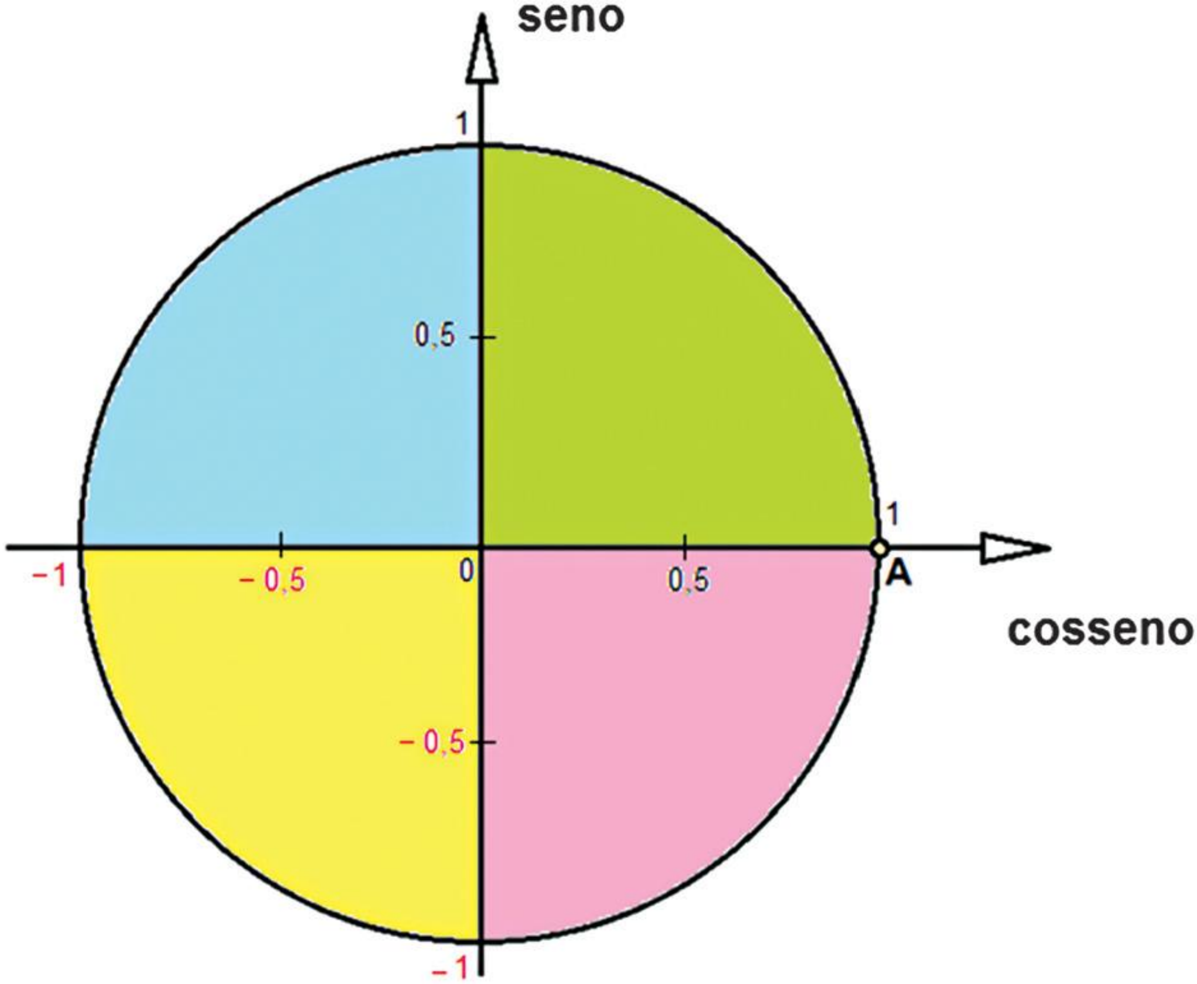
Com isso, vamos definir o eixo horizontal como sendo o Eixo dos Cossenos. Da mesma forma, como sempre utilizamos o seno para calcularmos as distâncias verticais, vamos definir o eixo vertical como o Eixo dos Senos.

Vocês podem estar se perguntando: Esses eixos são iguais aos *eixos cartesianos* que aprendemos no módulo sobre o estudo das funções?

É verdade. Eles fazem lembrar os eixos cartesianos mesmo.

Funcionam praticamente da mesma forma. Possuem a parte positiva, a parte negativa e a marcação das coordenadas é feita da mesma forma. A diferença é que os eixos cartesianos determinam pontos em todo o plano. Já os eixos trigonométricos determinam pontos apenas sobre a circunferência de raio unitário, nenhum na parte de dentro e nem na de fora, apenas sobre a linha.

<pág. 71>



(texto na parte superior da imagem: seno.

Texto na parte inferior da imagem: cosseno.)

Figura 7: No círculo trigonométrico, os eixos variam de −1 até +1, pois funcionam apenas com a circunferência de raio unitário. Esses eixos dividem o círculo em quatro partes, chamadas de quadrantes. Como tudo começa pelo ponto A, girando no sentido anti-horário, teremos o 1º quadrante na cor verde, o 2º na cor azul, o 3º na cor amarela e o 4º na cor rosa.

A Figura 7 mostra uma importante propriedade que podemos perceber: os valores no eixo dos senos e no eixo dos cossenos só variam de −1 a +1.

Agora, pessoal, sugiro explorar um pouquinho do círculo trigonométrico para que as demais propriedades e definições possam ser esclarecidas na prática.

Inicialmente, vamos colocar um ponto B na circunferência. Em seguida, traçamos a altura x deste ponto e o raio $\overline{OB}$. Perceba na Figura 8 a seguir que construímos, dessa forma, um triangulo retângulo, do mesmo jeito que fizemos com Sr. João, no relógio da Central do Brasil. Só que neste caso, o raio não é mais de 5 metros. O raio é unitário.

Como poderemos calcular a altura x do ponto B, sabendo que o ângulo AÔB vale 60º?

<pág. 72>

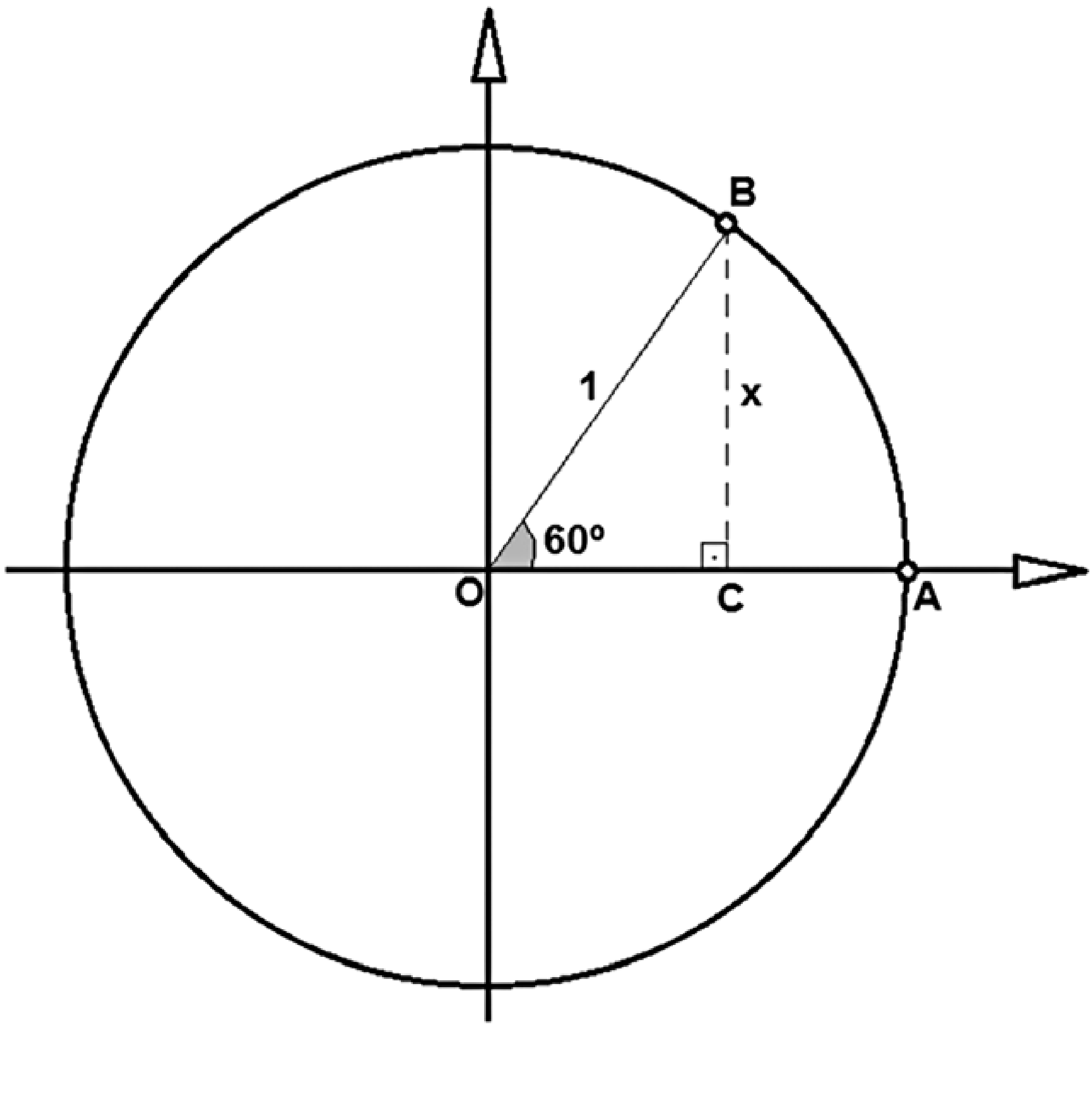


Figura 8: O ponto B sobre a circunferência possui uma altura x. Lembre-se da Trigonometria para calcular essa altura.

Como já fizemos antes, para determinar esta altura, utilizamos as razões trigonométricas. Nesse caso, mais especificamente, utilizaremos o seno do ângulo de 60º (distância vertical).

Este cálculo, deixamos por sua conta.

Atividade 7

Calcule a medida do segmento BC da Figura 8 (altura do ponto B). Utilize uma estratégia semelhante para calcular a medida do segmento OC.

****

Atividade 8

Agora, marque um ponto D nesta circunferência, a partir de A, no sentido anti-horário, de modo que o arco considerado seja menor que 90º. Qual a altura deste ponto? Qual a distância desse ponto ao eixo vertical? É muito fácil! Tenho a certeza de que não vai errar. Antes de

encerrar esta atividade, onde estariam localizados na circunferência os seguintes pontos (sempre em relação ao ponto A)?

Ponto E ⟶ 180º

Ponto F ⟶ 270º

Ponto G ⟶ 360º

Ponto H ⟶ 90º

Ponto I ⟶ 180º

Ponto J ⟶ 270º

Ponto K ⟶ 120º

Ponto L ⟶ 190º

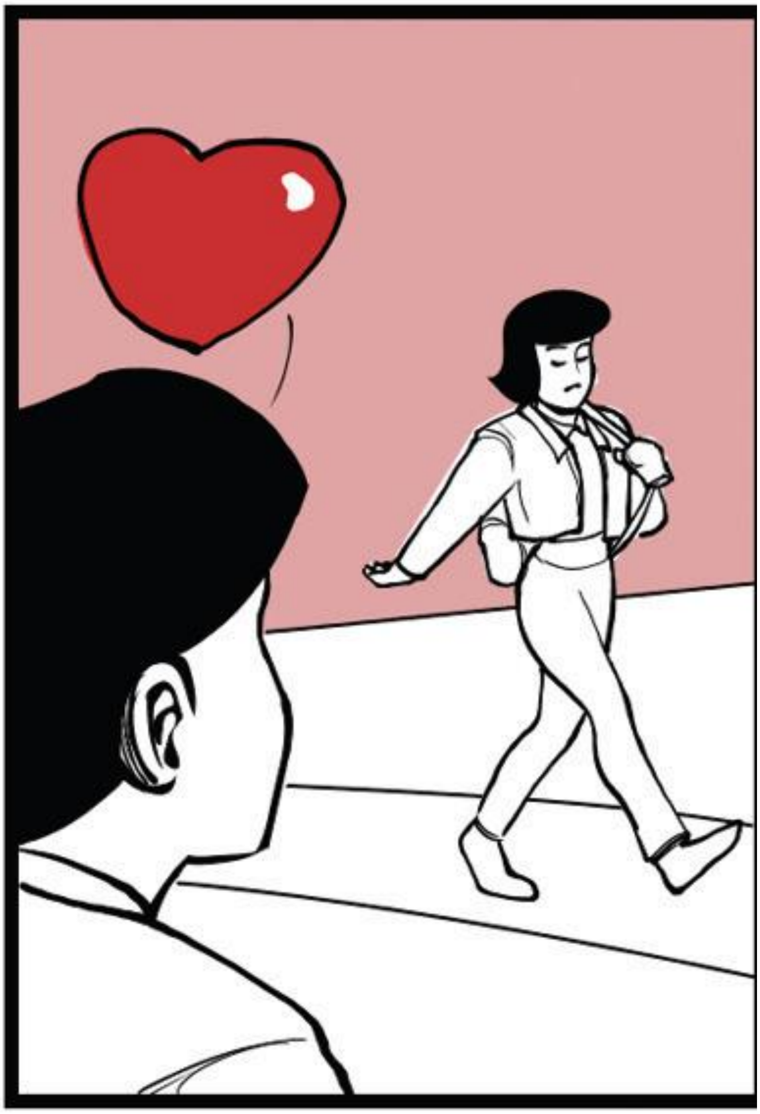
Ponto M ⟶ 300º

Ponto N ⟶ 380º

******

<pág. 73>

Estas últimas atividades levam-nos a entender que o raio unitário da circunferência permite-nos dizer que o eixo dos Senos revela-nos o valor do seno de cada ângulo. Da mesma forma que o eixo dos cossenos revela-nos o valor do cosseno de cada ângulo. E isso é muito importante, pois facilita em algumas coisas. Quer ver? Vamos lá!




Lia. Estava indo à quitanda. Posso te comprar uns bombons?
Olá, Rui. Que bom! Quantos vai comprar?


Quantos quiser!
Então, quero a mesma quantidade que o número de soluções da equação sen x = 0,5.

É, pessoal. Rui parece não estar com sorte, mas nem tudo está perdido. Ele pode contar com nossa ajuda. Vamos entender um pouco o que Lia disse a ele:

Lia: quero a mesma quantidade que o número de soluções da equação sen x = 0,5.

Vamos recordar uma coisa: a solução de uma equação é o valor da incógnita, que neste caso é o x, que mantenha a igualdade da expressão. Também vamos considerar apenas os valores de x variando entre 0º e 360º, isto porque em Trigonometria podemos considerar arcos com medidas maiores que 360º, mas isto é um assunto para outro momento, não se preocupe agora! Vamos voltar ao problema que Rui precisa resolver...

Então, se relembrarmos a unidade anterior, quando aprendemos os valores dos senos de alguns ângulos, veremos que 0,5, ou ½, era o valor do seno do ângulo de 30º. Já temos, portanto, a primeira solução. Será que existem mais? Vamos dar um pulinho no círculo trigonométrico!

<pág. 74>

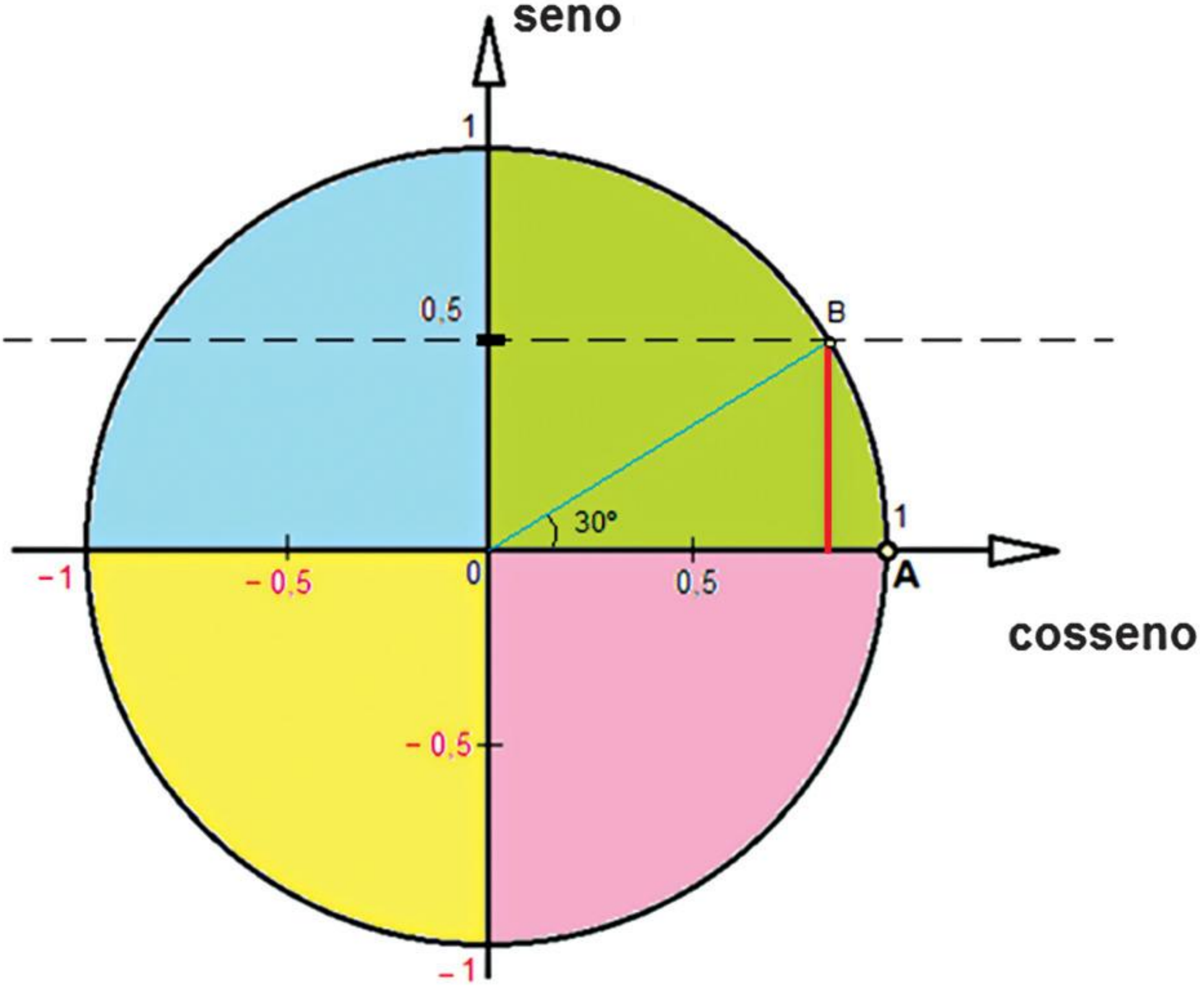
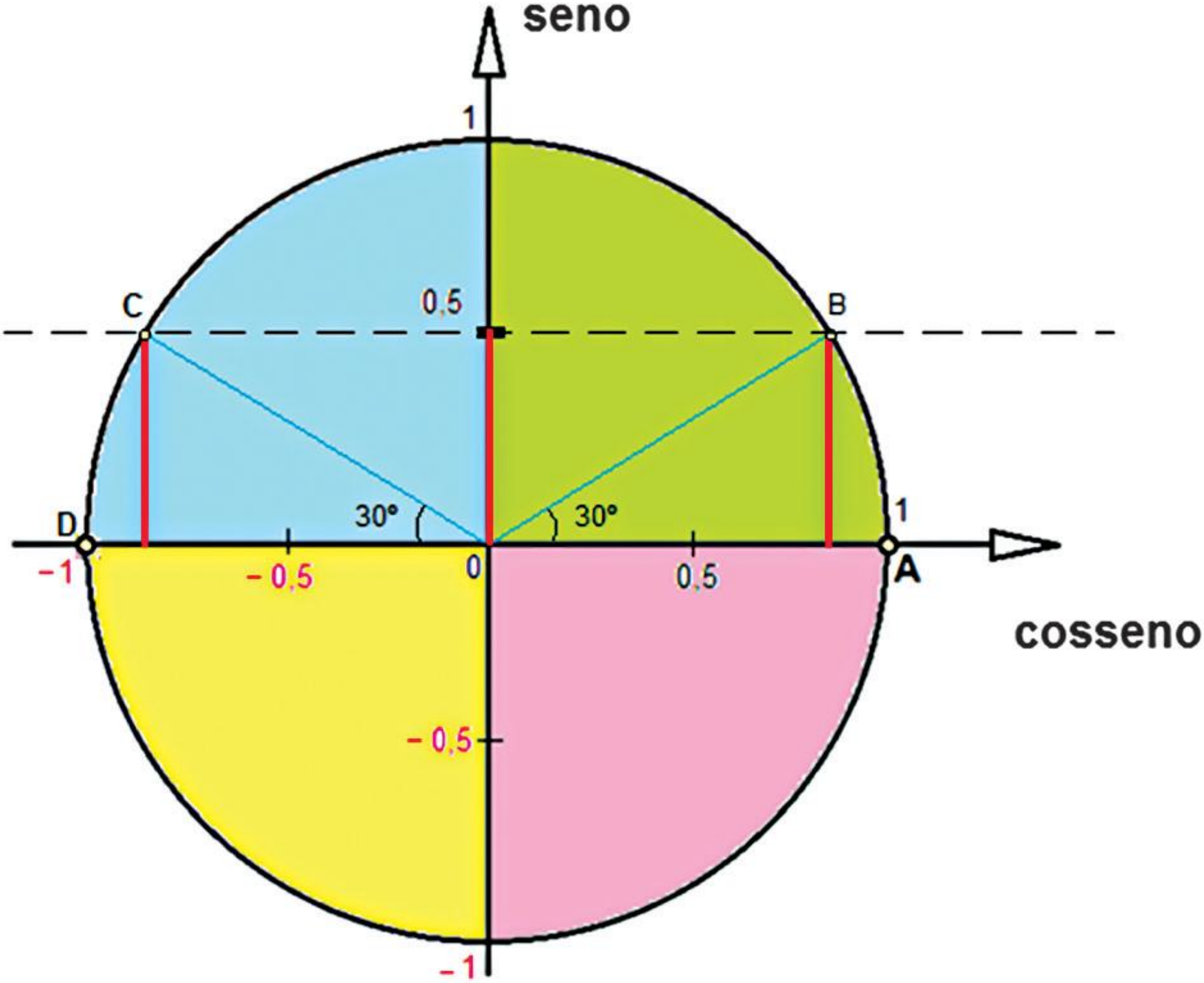


Figura 9: O ponto B, a 30º de A, é uma das soluções da equação, pois o seno de 30º (a distância vertical, a altura do ponto) é igual a

0,5. Repare, porém, que a linha pontilhada que determina essa altura, cruza o círculo trigonométrico em outro lugar. Para saber qual é esse ponto, vamos lembrar que na atividade 3 vimos que sempre havia duas posições no relógio em que Sr. João podia ocupar e manter a mesma altura. Note que algo similar ocorre aqui.

Se seguirmos o mesmo raciocínio que nas atividades com Sr. João, veremos que o outro ponto, do outro lado do eixo dos senos faz o mesmo ângulo com o eixo

horizontal. Vamos visualizar isso na figura a seguir:



Sendo assim, como o ponto D faz 180º (meia volta) com o ponto A, então o ponto C está a

180º – 30º = 150º em relação ao ponto inicial A.

<pág. 75>

Importante

Giramos de A a D (sentido anti-horário, positivo) para determinar o ângulo de 180º. Giramos de D a C (sentido horário, negativo) para determinar os 30º.

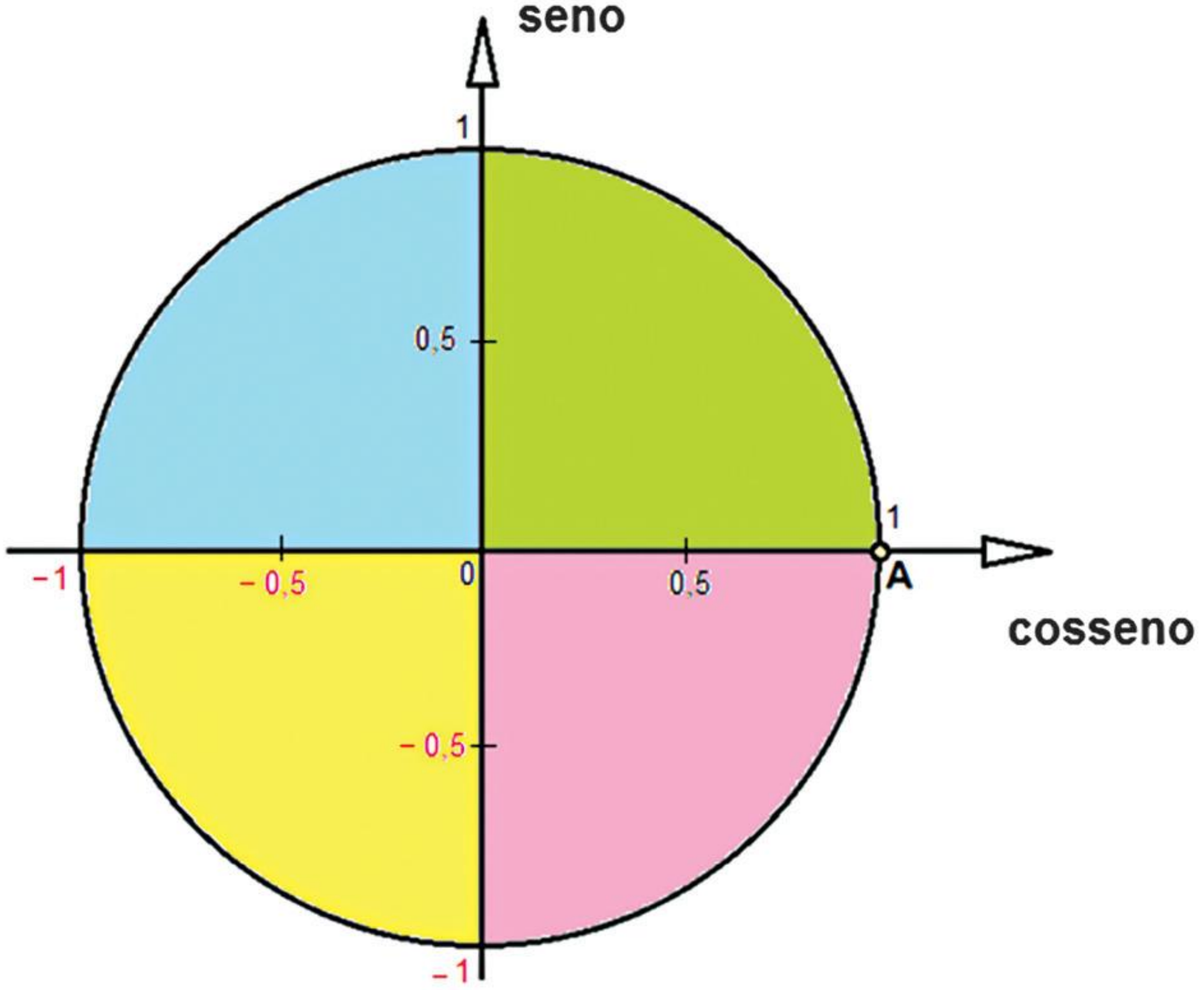
******

Então, vamos correr para avisar ao Rui que a equação que Lia lhe propôs, possui duas soluções: 30º e 150º. Sendo assim, deverá comprar para ela dois bombons e, assim, impressioná-la mais um pouco para quem sabe conquistar o seu coração.

Agora, é com você! Resolva a atividade proposta, relacionada ao que acabamos de realizar. Quem sabe dá sorte no amor também!

Atividade 9

Determine as soluções da equação . Colocamos um círculo trigonométrico aqui para te auxiliar.



<pág. 76>

Ao longo desta unidade, trabalhamos com diversos ângulos. E, como toda medida, foi necessário utilizarmos uma unidade, o grau. Porém, o Sistema Internacional de Unidades determina que a unidade padrão para ângulos é o RADIANO. Mas, antes de definirmos o radiano como uma unidade de medida de ângulo, vamos trabalhar um pouco com comprimentos de arcos de circunferência.

Saiba Mais

Duas circunferências distintas são figuras semelhantes. Dessa forma, a razão entre duas linhas homólogas é constante. Se, por exemplo, dividirmos a medida do diâmetro de qualquer circunferência pela medida do seu raio, obteremos 2 como resultado. Se dividirmos o comprimento de qualquer circunferência pela medida do seu diâmetro, também obteremos um valor constante, que chamaremos de π. Mas que número é esse? No link http://educador.brasilescola.com/estrategias-ensino/calculo-valor-pi.htm é apresentado o método utilizado por Arquimedes para a determinação de uma aproximação para esse número.

******

Como foi dito anteriormente, ao

dividirmos o comprimento de qualquer circunferência pela medida do seu diâmetro, obteremos um valor constante (π

Podemos dizer que $\frac{Cr}{2r} = \pi$

(C indica o comprimento da circunferência e r a medida do seu raio), de onde obtém-se a fórmula para o cálculo do comprimento de uma circunferência: 2C π r.

Atividade 10

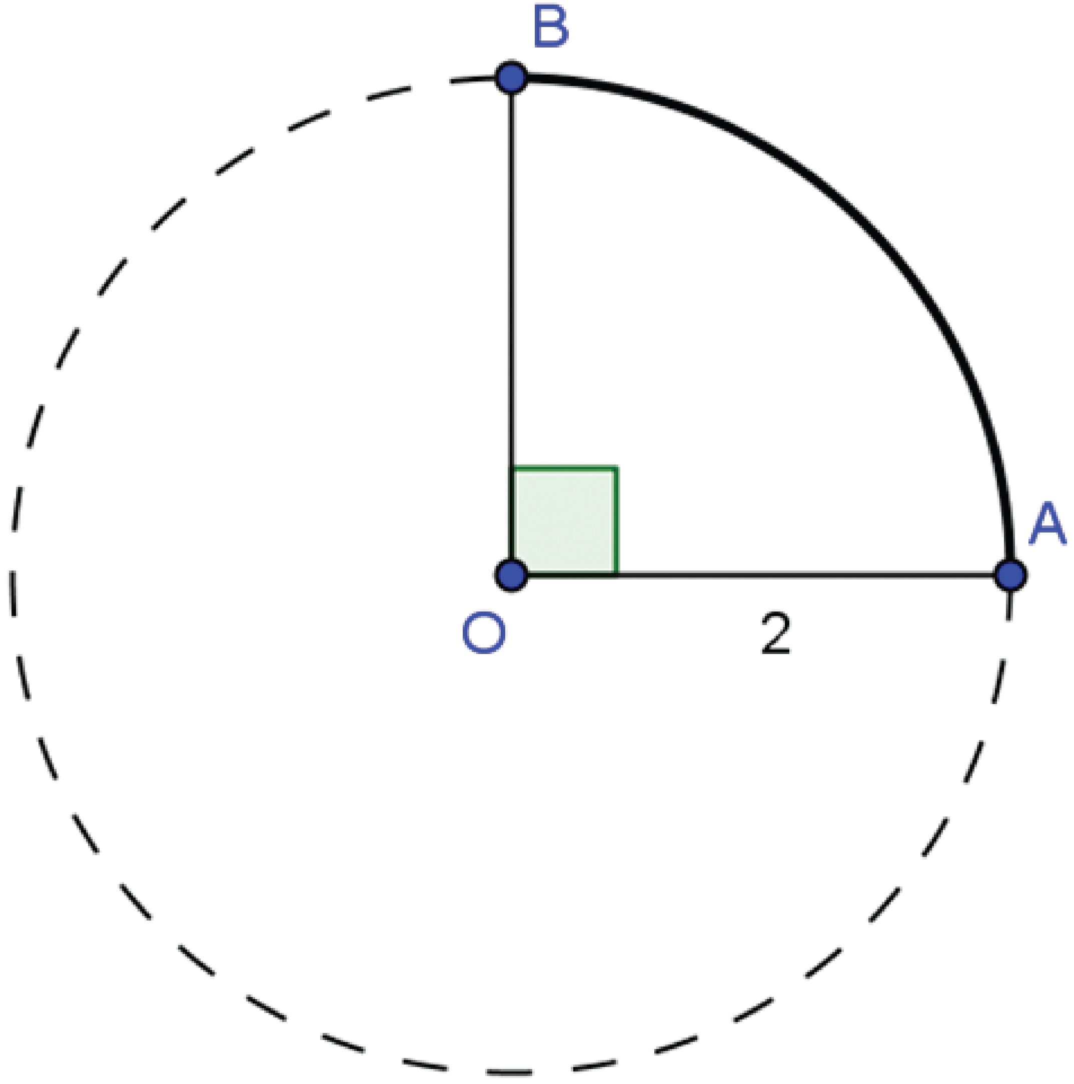
Quais os comprimentos das circunferências cujos raios medem 2 cm, 1 cm, 3.5 cm, respectivamente?

<pág. 77>

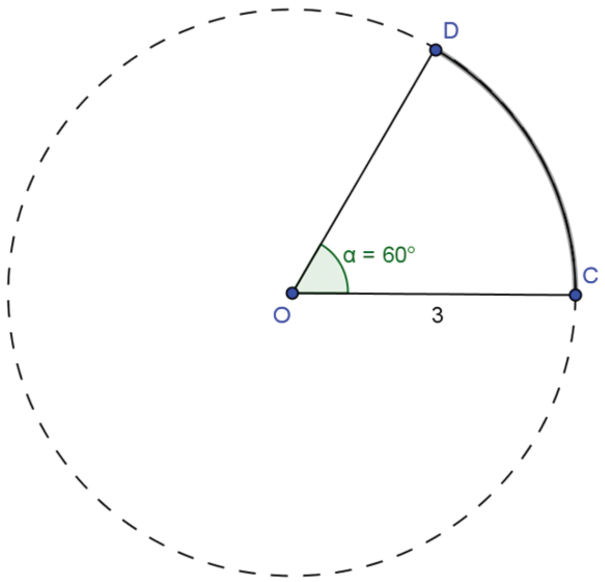
Atividade 11

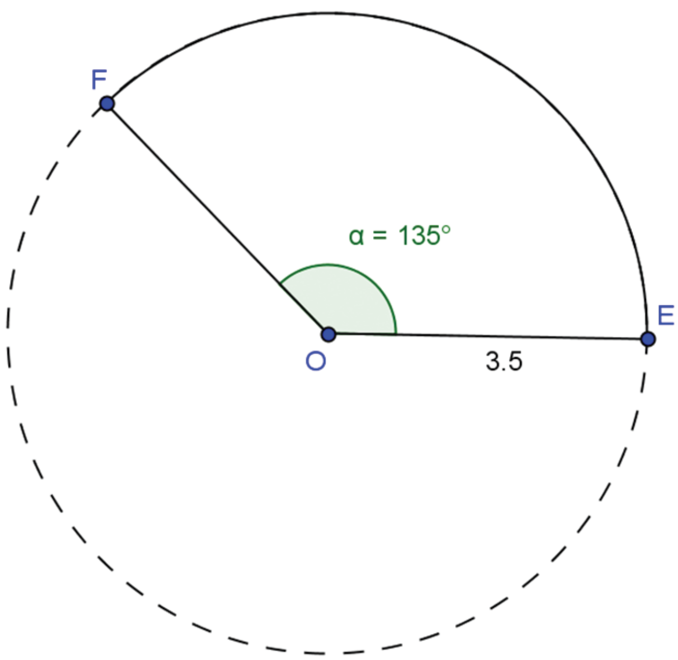
Com a atividade anterior, calculamos comprimentos de circunferências. Como podemos calcular o comprimento de certas partes da circunferência? É fácil perceber que o comprimento de uma semicircunferência é π r (a metade do comprimento

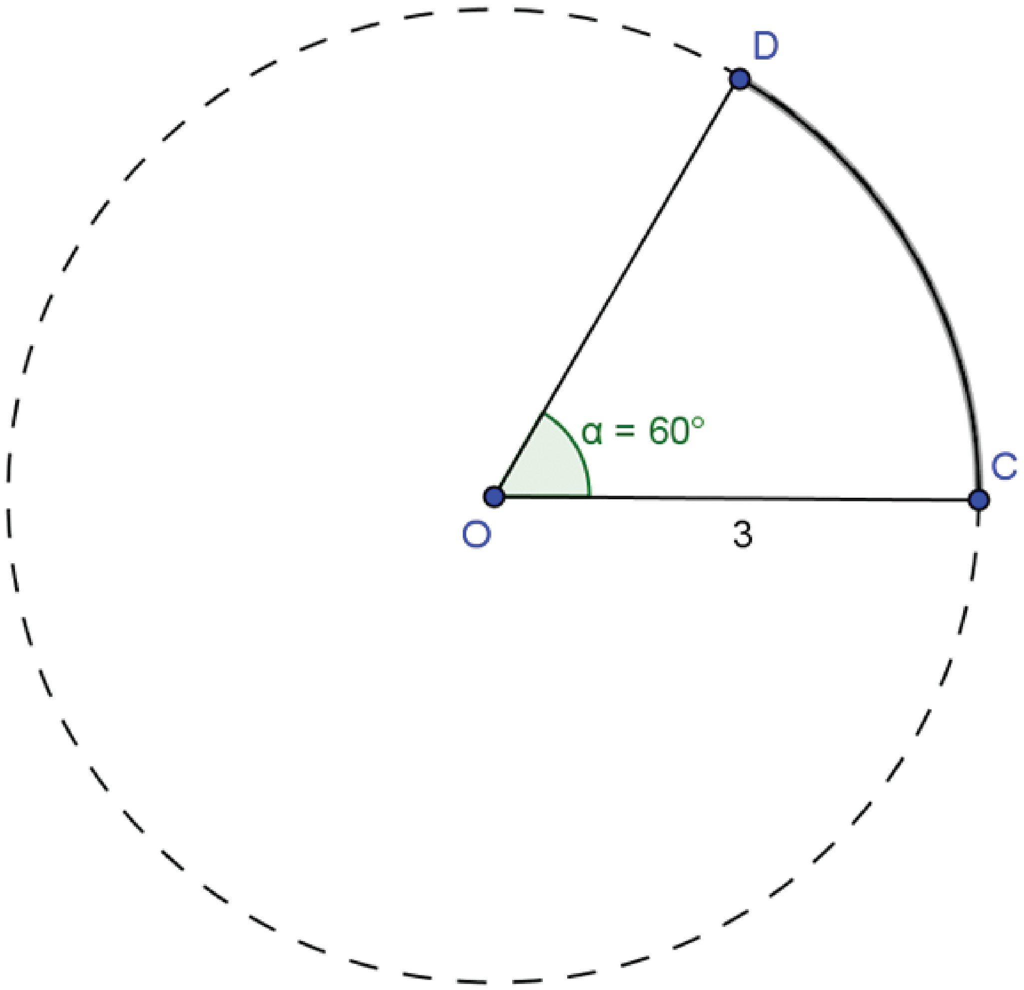
total, que é 2 π r). Calcule os comprimentos dos arcos AB , CD e EF determinados por ângulos centrais nas circunferências a seguir.



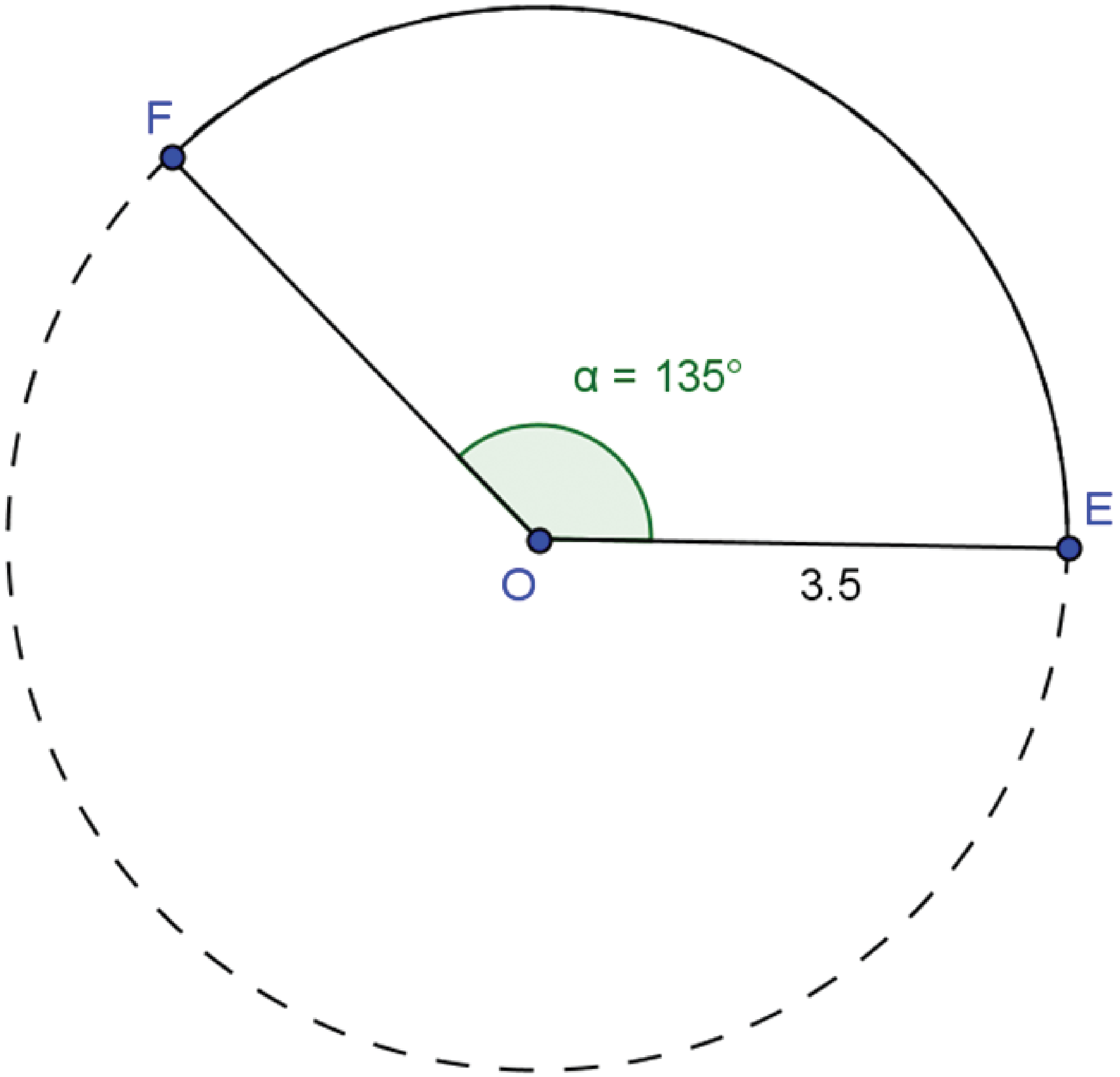
176







D
α = 60°
C
O
3



<pág. 78>

Um ângulo que mede 1 Radiano determina um arco de mesma medida que o raio da circunferência.

Como visto anteriormente, o comprimento de uma circunferência é é . Pela definição de radiano apresentada acima, uma volta completa possui 2π radianos. Dessa forma, podemos associar graus e radiano assim:

360º = 2π rad

Então, segue que:

180º = π rad

90º = π /2 rad , e por aí vai...

Saiba Mais

A letra grega π representa na Matemática o número irracional 3,14159265.... Em geral, aproximamos esse valor ora para 3,14, ora para 3,1, ora para 3 dependendo do caso. Visite o site http://pt.wikipedia.org/wiki/Pi e conheça algumas curiosidades deste número.

******

Atividade 12

Complete a tabela de modo que a coluna à direita contenha a medida em radianos dos arcos medidos

em graus da coluna da esquerda.

Medidas em graus	**Medidas em radianos**
30º	
	π / 4 rad
60º	
	3 π / 2 rad
300º	

	2 rad

******

<pág. 79>

Resumindo...

.No círculo trigonométrico, podemos encontrar os valores de seno e cosseno dos ângulos. Esses valores auxiliam no cálculo de algumas distâncias (medida de segmentos).

.O eixo vertical é conhecido como eixo dos senos.

.O eixo horizontal é conhecido como eixo dos cossenos.

.Os valores de seno e cosseno variam de −1 a +1.

.Uma volta determina um ângulo de 2 π radianos ou 360º.

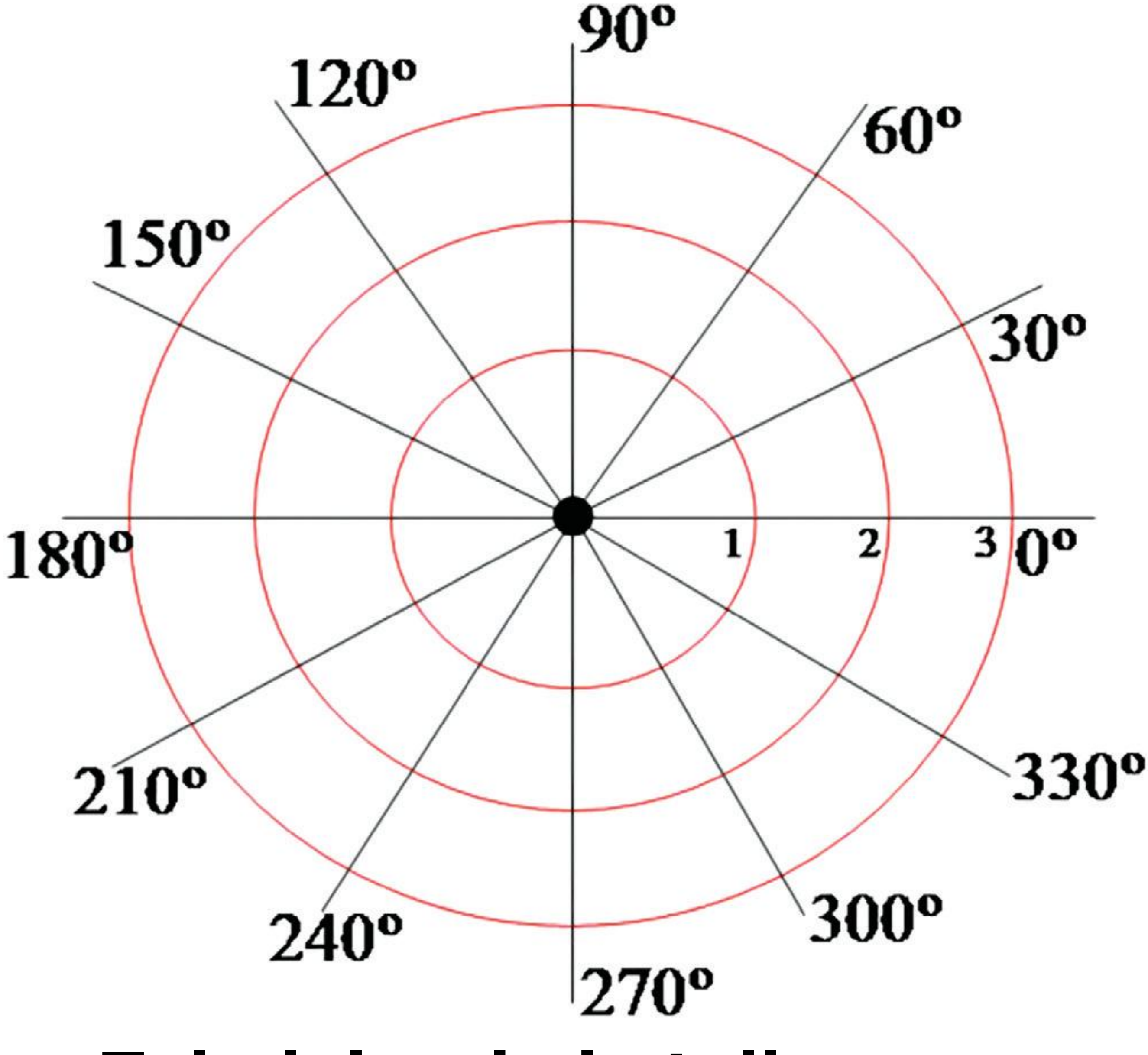
Veja ainda

Início

1. Quer se divertir, utilizando os conceitos aprendidos nesta unidade?

Então acesse http://educador.brasilescola.com/estrategias-ensino/batalha-naval-no-circulo-trigonometrico. htm.

Chame um colega para jogar essa batalha naval diferente com você!!!!



Tabuleiro da batalha naval

2. Você pode fazer download no software

gratuito Trigonometria 1.1 (que é um arquivo executável) no site http://www.baixaki.com.br/download/trigonometria.htm

<pág. 80>

O programa é fácil de usar, basta digitar o valor de um ângulo, em graus ou radianos e clicar em Iniciar ou Mostrar e o programa gera os valores das funções seno, cosseno e tangente.

Referências

Livros

.Dante, L. Roberto. Matemática: Contexto e aplicações. Volume 1. Ed. 3. Impressão 1. Editora Ática. São Paulo. 2003.

.Iezzi, Gelson (e outros). Fundamentos de Matemática Elementar. Volume 3. Ed Atual. São Paulo. 1995.

<pág. 81>

Respostas das atividades

Atividade 1

João estaria na mesma altura se estivesse sentado no número IX, ou seja, 9.

Atividade 2

Resposta letra d.

Atividade 3

Caso Sr. João queira ficar na mesma altura do número 5, basta se posicionar sobre o número sete.

Os números que estão a 30º do número 12 são onze e um. Com isso, podemos dizer que possuem alturas iguais (iguais / diferentes).

Sr. João quer ficar na maior altura possível. Para isso, terá de se sentar sobre o número doze. A altura neste número é de 120 metros. Já o número seis está na posição mais baixa, isto é, a 110 metros de altura.

Atividade 4

a. Opção c.

b. 5 metros

c. Opções b e d

Atividade 5

Letra d mesma distância da encontrada na letra b.

Letra c

$$\cos 60^\circ = \frac{\text{catetoadjacente}}{\text{hipotenusa}} =$$

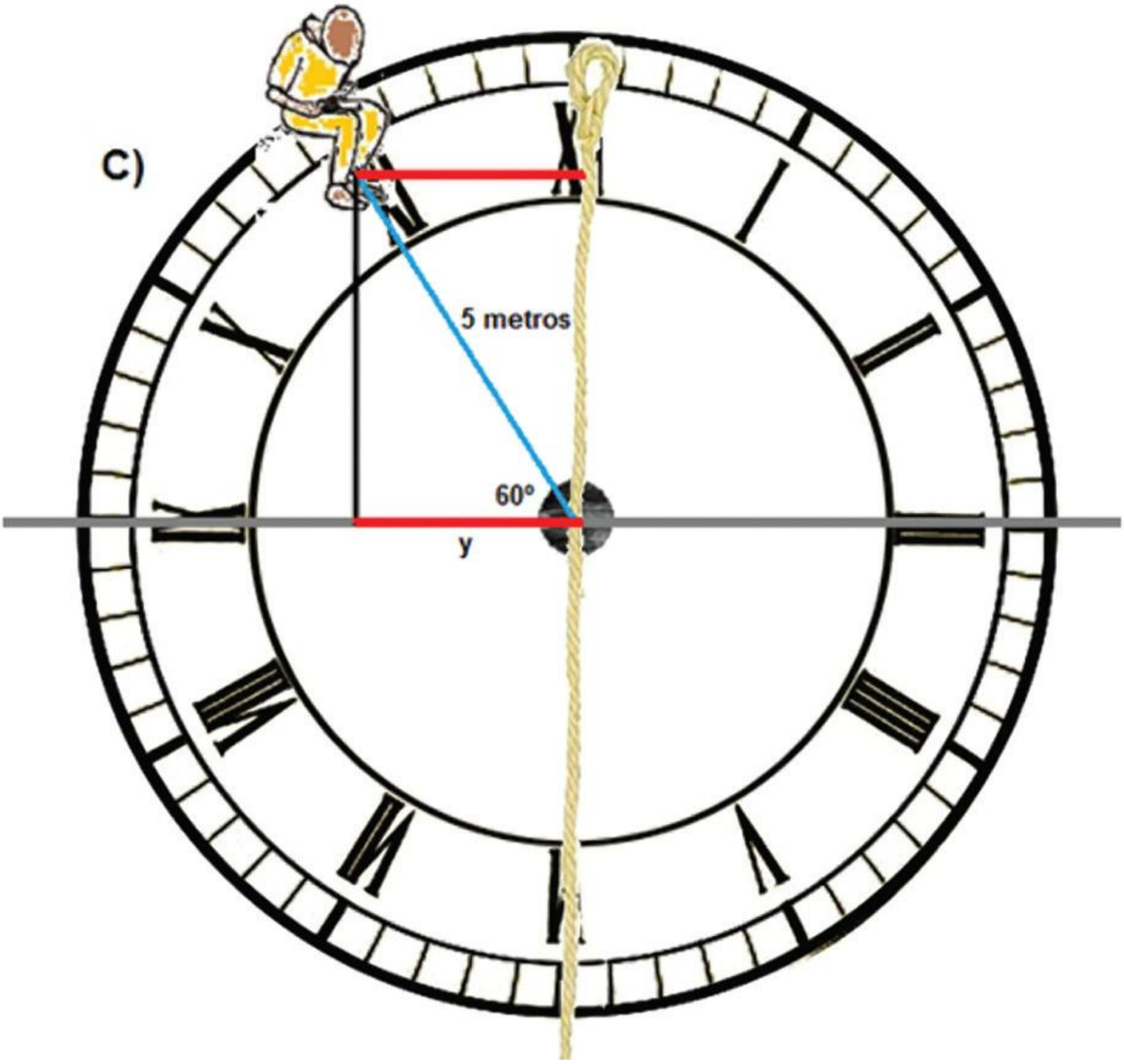
$$\frac{y}{5}$$

<pág. 82>

Como cos 60 ° = $\frac{1}{2}$, temos que: $\frac{1}{2} = \frac{y}{5}$

$$y = \frac{5}{2} = 2{,}5 \text{ metros}$$

C)



Atividade 6

Em todos os exercícios que fizemos, para calcularmos as distâncias verticais, sempre utilizamos a razão trigonométrica seno (seno / co-seno /

tangente). Ao passo que, em todos esses exercícios, calculamos as distâncias horizontais sempre através do cosseno (seno / cosseno / tangente).

Aprendemos nesses exercícios que a distância de Sr. João até a corda depende da posição em que se encontra no relógio. Desta posição sempre conseguimos determinar um ângulo com o eixo horizontal que por sua vez passa pelo centro do relógio e pelos números três e nove. Trabalhamos em todos os casos com este eixo. Ele é muito importante

para o conhecimento que estamos desenvolvendo nesta unidade.

<pág. 83>

Atividade 7

$$\text{sen}60° = \frac{x}{1}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{1}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong \frac{1,7}{2} = 0,85$$

Para calcularmos OC, precisamos do cosseno de 60º

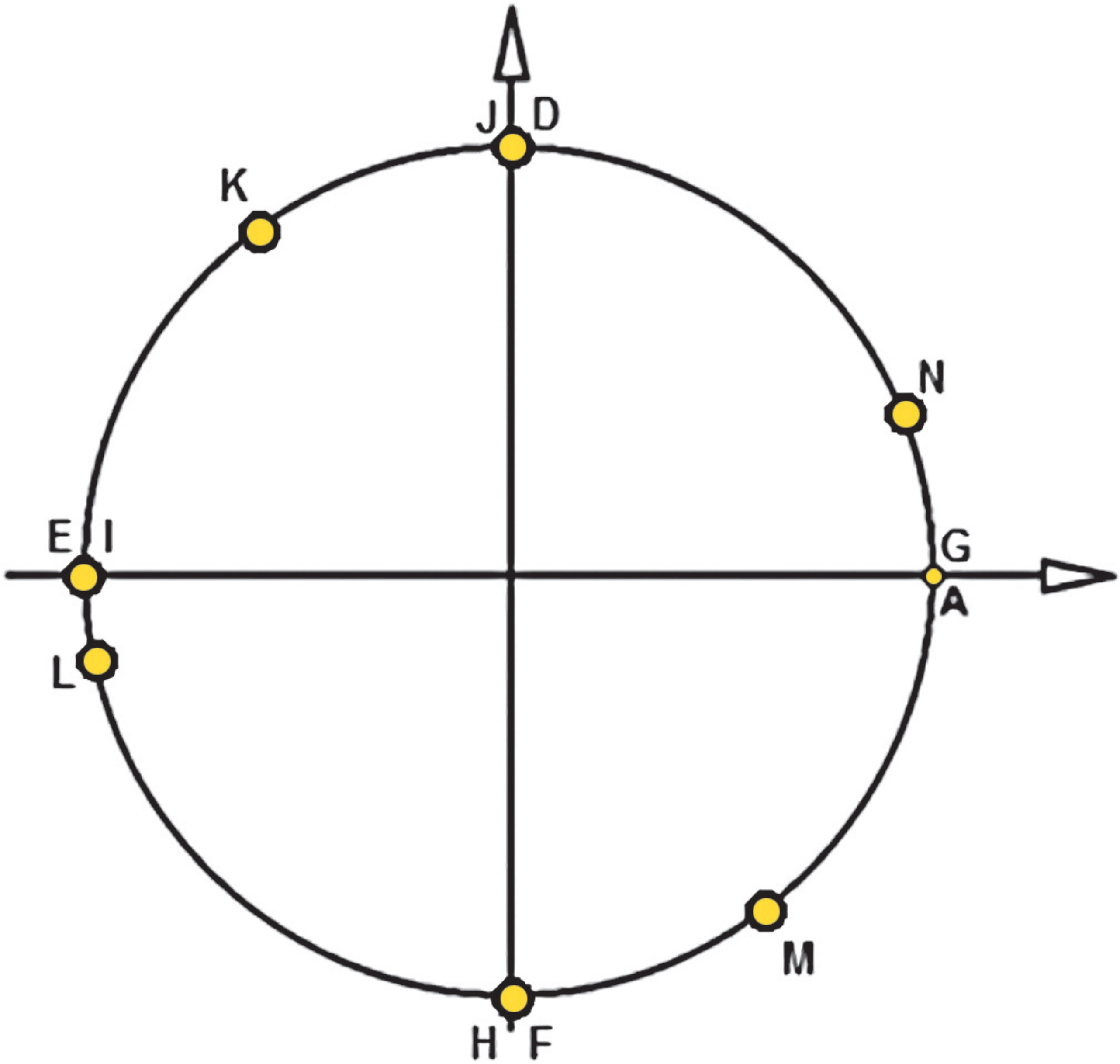
$$\cos 60^\circ = \frac{OC}{1}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{OC}{1}$$

$$OC = \frac{1}{2} = 0,5$$

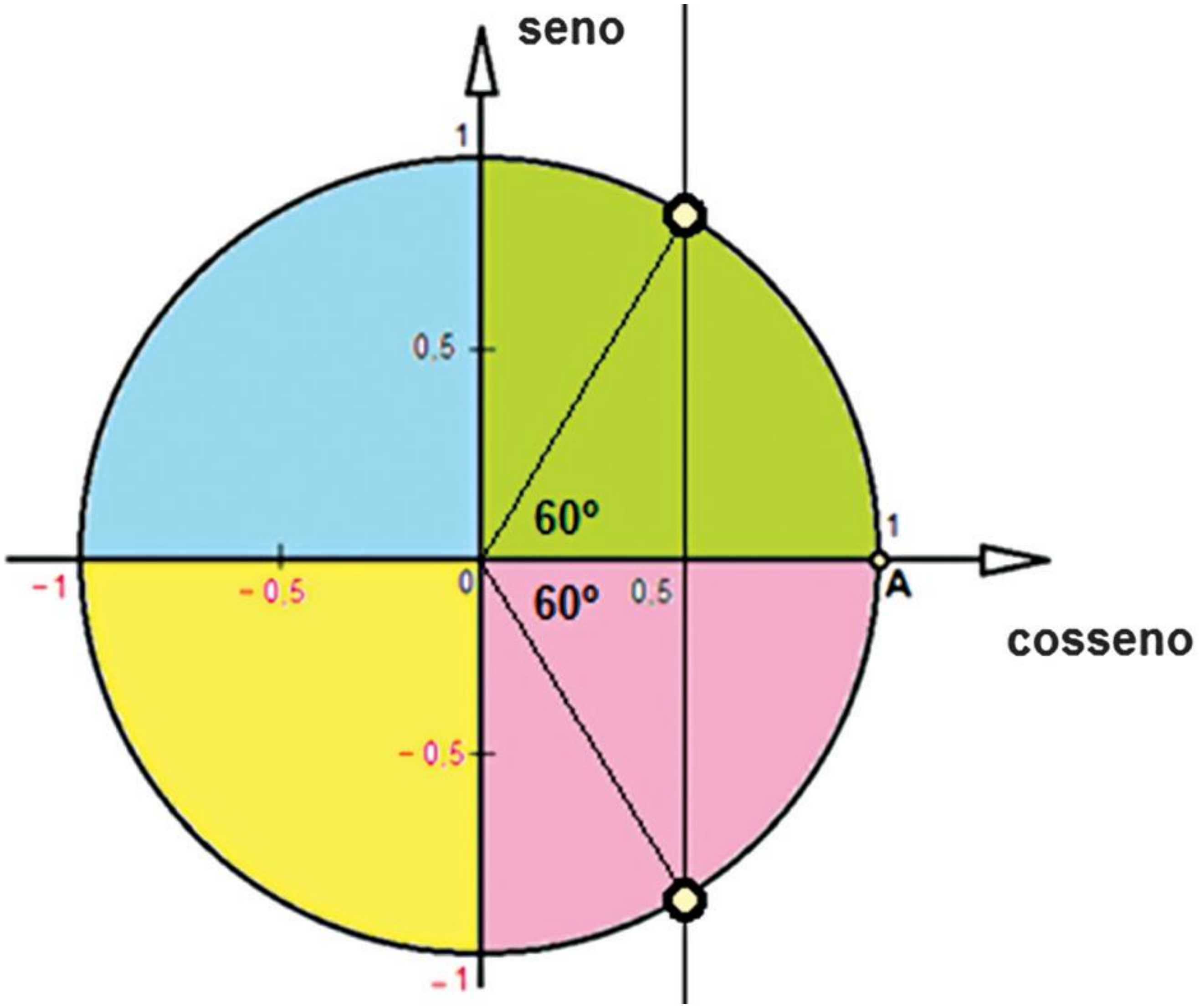
Atividade 8

A distância do ponto D ao eixo horizontal é igual ao raio da circunferência, ou seja, 1 unidade.


J
D
K
N
E
I
G
A
L
M
H
F

<pág. 84>

Atividade 9



Percebemos que a primeira solução é ângulo de 60º e que a segunda solução é o ângulo que está a 60º de A no sentido horário. Logo, 360º – 60º = 300º.

Atividade 10

4 π cm, 2 π cm, 7 π cm respectivamente.

Atividade 11

$\overline{AB}$ tem comprimento igual à quarta parte do comprimento da circunferência de raio 2, ou

seja, AB = $\frac{2\pi \cdot 2}{4} = \pi$

$\overline{CD}$ tem comprimento igual à sexta parte do comprimento da circunferência de raio 3, ou seja, CD = $\frac{2\pi \cdot 3}{6} = \pi$

$\overline{EF}$ tem comprimento igual a três oitavos do comprimento da circunferência de raio 3.5, ou seja,

EF = $\frac{3}{8} \cdot 2\pi \cdot 3{,}5 = \frac{21\pi}{8}$

<pág. 85>

Atividade 12

Medidas em graus	Medidas em radianos
30º	π / 6 rad
45º	π / 4 rad
60º	π / 3 rad
270º	3 π / 2 rad

300º	**5 π / 3 rad**
300º/ π	**2 rad**

<pág. 87>

O que perguntam por aí...

Unifravas – 2000

A figura MNPQ é um retângulo inscrito em um círculo. Se a medida do arco AM é π /4 rad, as medidas dos arcos AN e AP, em radianos, respectivamente, são:

200

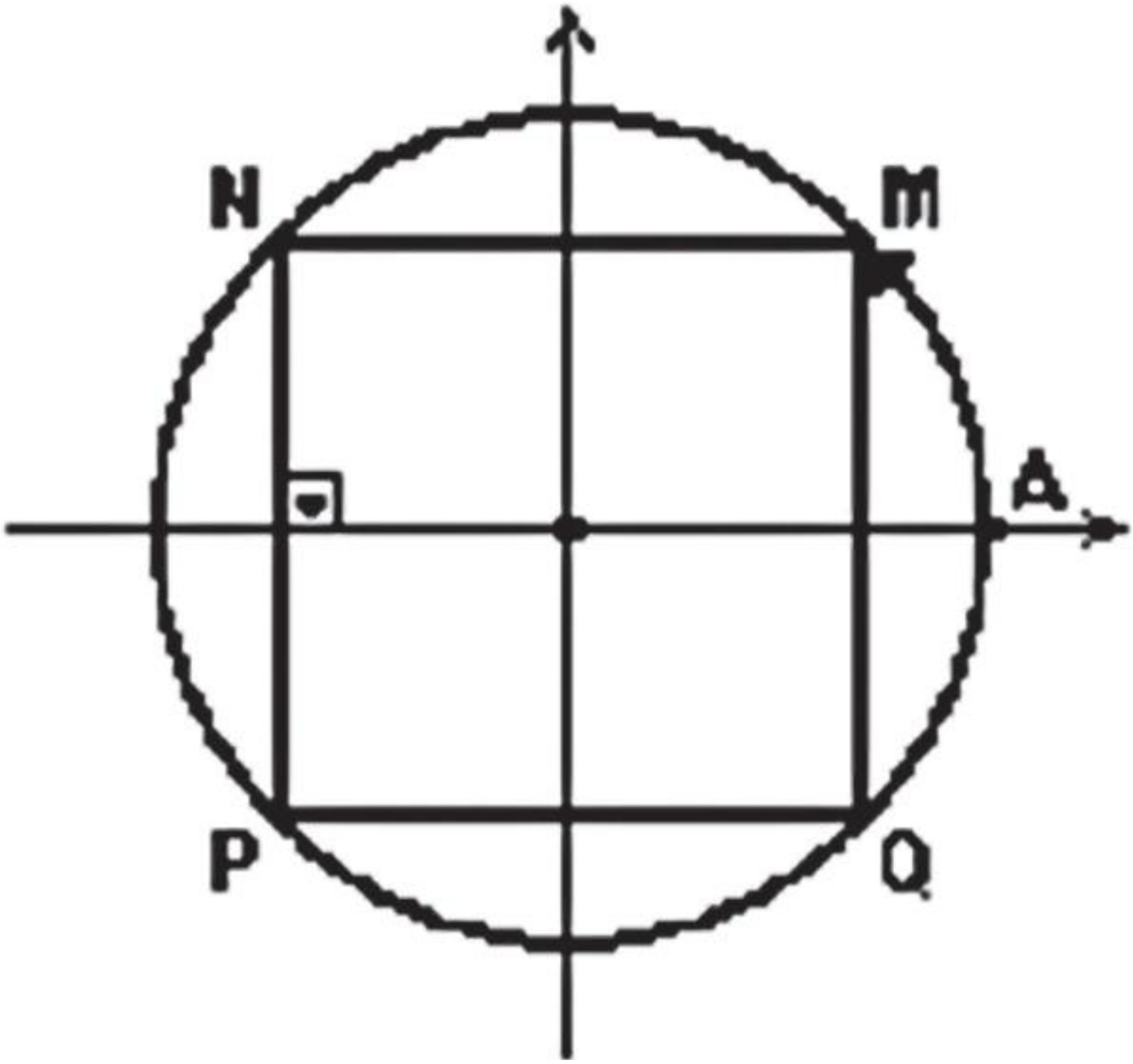
a. $3\pi/4$ e $5\pi/4$

b. π e $3\pi/2$

c. $3\pi/4$ e 2π

d. $\pi/2$ e $5\pi/4$

e. $3\pi/4$ e $5\pi/8$



Resposta: Letra A

Sendo π rad = 180º,

$\frac{\pi}{4} = \frac{180º}{4}$ = 45º π /

4 rad = 180º / 4 = 45º.

Logo, o arco AM mede 45º. Como o retângulo da figura mostra que o ponto N tem a mesma altura que o ponto M, então N está a 45º da horizontal, ou seja, 180º – 45º = 135º que, em radianos vale 3 π /4 rad. Já o ponto P está a 45º depois do eixo horizontal, pois devido às propriedades do retângulo P está a uma mesma distância deste eixo

que o ponto N. Logo, P está a 180º + 45º = 225º que, em radianos vale 5 π /4 rad.

Material Não Formatado_Links:

1. Plataforma de aprendizagem

Assunto: Razões trigonométricas

Link: http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/10718/DefinicaoRazoesTrigonometricas.htm?sequence=18

<pág. 88>

Descrição: Esta plataforma de aprendizagem tem o objetivo de simular as razões trigonométricas associadas a um triângulo retângulo.

2. Software

Assunto: Círculo trigonométrico

Link: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnica.html?id=12055

Descrição: Programa que mostra um círculo trigonométrico que, de

acordo com um ângulo dado, permite visualizar gráfica e textualmente os valores correspondentes a três funções trigonométricas: o seno, o co-seno e a tangente.

3. Software

Assunto: Radiano

Link: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnica.html?id=33162

Descrição: Neste programa, o apresentador discute com um convidado especial, contando com algumas participações de ouvintes, o significado da palavra radiano no contexto da Matemática.

<pág. 89>

Caia na Rede

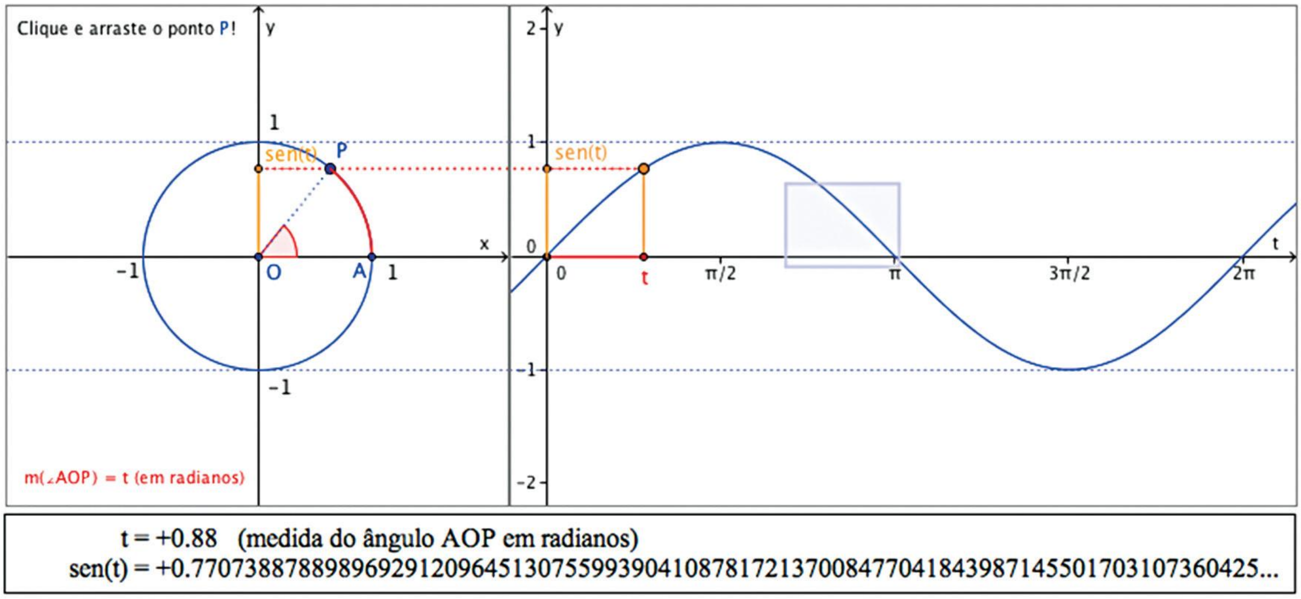
O site http://www.uff.br/cdme/ftr/ftr-html/ftr-def-br.html é uma boa opção para analisar os gráficos das funções trigonométricas.

Você pode, por exemplo, observar o aplicativo interativo que mostra o gráfico:

y = sen(t) construído, considerando-se t como

medida de ângulos em radianos.

O gráfico da função seno usando-se o radiano como medida de ângulos

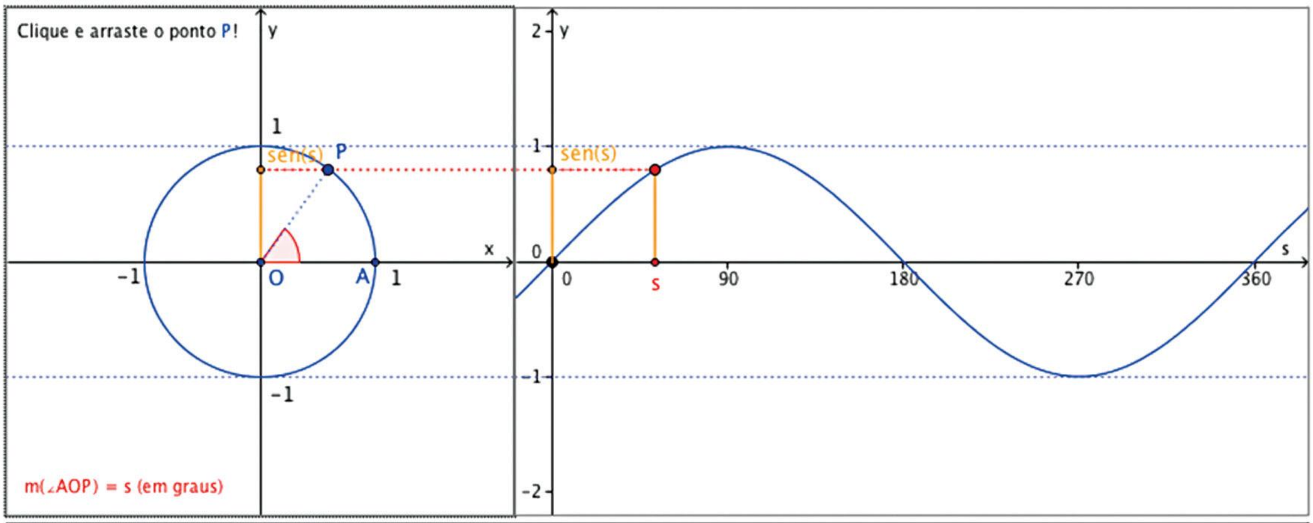


Basta arrastar o ponto P para modificar o ângulo t.

y = sen(s) construído, considerando-se s como medida de ângulos em graus

<pág. 90>

O gráfico da função seno usando-se o grau como medida de ângulos



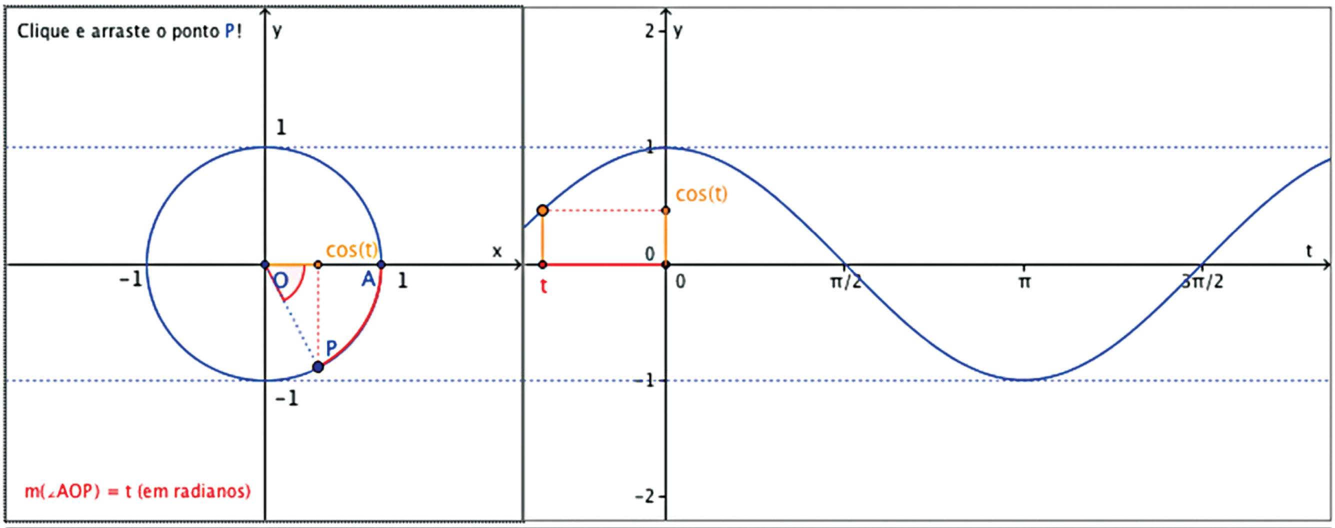
s = +53 (medida do ângulo AOP em graus)

sen(s) = +0.79863551004729284628400080406893624426626763449877158033565283780500241133450301...

Basta arrastar o ponto P para modificar o ângulo s.

$y = \cos(t)$ construído considerando-se t como medida de ângulos em radianos.

O gráfico da função cosseno usando-se o radiano como medida de ângulos



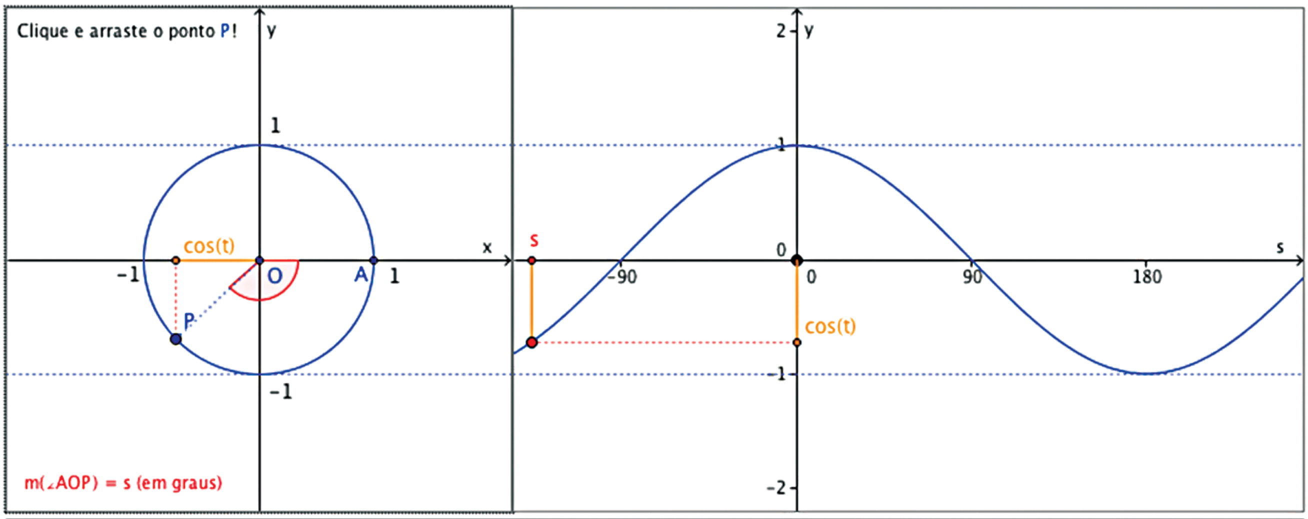
t = −1.09 (medida do ângulo AOP em radianos)
cos(t) = +0.46248536687530087702789707387514314186819713931581987564487215202146230056418981...

<pág. 91>

Basta arrastar o ponto P para modificar o ângulo t.

y = cos(s) construído considerando-se s como medida de ângulos em graus.

O gráfico da função cosseno usando-se o grau como medida de ângulos



s = −136 (medida do ângulo AOP em graus)
cos(s) = −0.7193398003386511393560546744567119082306845589419657712802140343154806910715439...

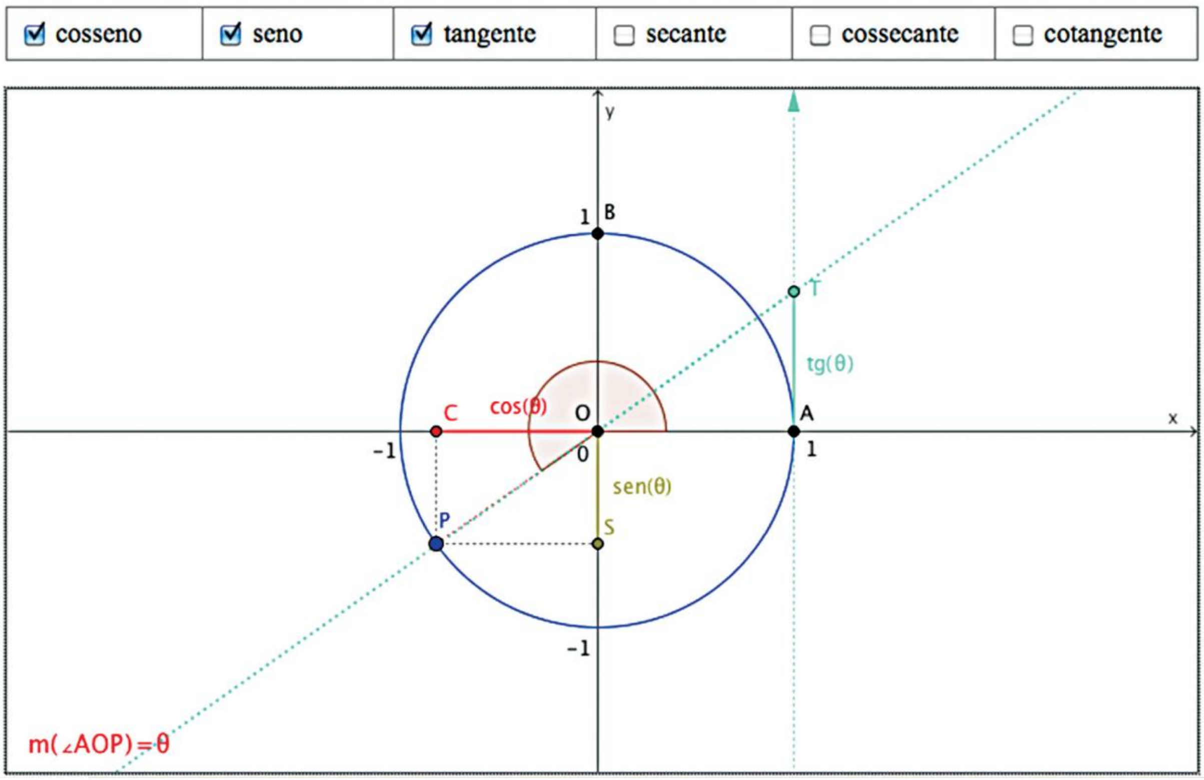
Basta arrastar o ponto P para modificar o ângulo s.

Você também pode visualizar as representações geométricas das funções cosseno, seno, tangente, secante, cossecante e

cotangente no círculo trigonométrico.

<pág. 92>

Funções trigonométricas e o círculo trigonométrico



Basta clicar ao lado da função que você deseja

representar. Nesse caso, estamos representando seno, cosseno e tangente.